This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematik**, der **Naturwissenschaften** und **Technik** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter dieser Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes a Wissen- s ten ge- d , wenn a tand in n esonders a Leipzig, M tischen V Algebra, d isie und G lußband G ösische A gonnen. natur- w Mathe- n für Ge- s ematik u Vereini- g gan für a natur- w schaft- li iologie, d t aller S Erde, il

math 3039.08

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650. CHRISTO ECCLESIAE

BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)

SCIENCE CENTER LIBRARY

ndlung P en", die i , sollen d den er- s Unter- n nzeigen d em In- t t und p Verlags v wissen- s mit ein- gehender s ie und einem Gedenk- tagebuch em Anhange, Unterhaltungsliteratur enthaltend. [CXXXI, 392 u. 92 S.] gr. 8. 1908 steht Interessenten umsonst und postfrei zur Verfügung.

B. G. Teubner.

M. V

VORLESUNGEN
ÜBER BESTIMMTE INTEGRALE UND
DIE FOURIERSCHEN REIHEN

VON

J. THOMAE
IN JENA

MIT 10 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

Math 3039.08

HARVARD COLLEGE
FEB 4 1909
LIBRARY.

Bowditch fund

ALLE RECHTE, EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Durch meine im Jahre 1875 erschienene „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale" habe ich mich an der prinzipiellen Entwickelung dieser Lehre mit beteiligt. In Vorlesungen über bestimmte Integrale kann natürlich die allgemeine Theorie als Grundlage auch nicht entbehrt werden, es sind vielmehr die Vorlesungen über Infinitesimalrechnung, die nach meiner Meinung mehr das Erlernen als das tiefere Erkennen in den Vordergrund zu stellen haben, in ihnen zu ergänzen. Aber als Hauptziel der Vorlesungen ist die wirkliche Auswertung bestimmter Integrale anzusehen. Die Auswahl hierher gehöriger Beispiele schließt sich natürlich der historischen Entwickelung an, und ist so zu treffen, daß durch sie die allgemeinen prinzipiellen Sätze hell beleuchtet werden. Die Entwickelung willkürlicher Funktionen in die Fouriersche Reihe gibt Gelegenheit zur Auswertung von Integralen, die sonst vielleicht nicht behandelt sind.

Ich habe mich bemüht, die einfachen Integrale streng arithmetisch zu behandeln. Bei den Doppelintegralen und den zweigliedrigen Integralen konnte ich aber auf die Unterstützung durch graphische Darstellung nicht verzichten. Ich hoffe, daß man bei den von mir ausdrücklich betonten Beschränkungen auch diesen Teil als hinreichend streng anerkennen wird.

Im Gegensatz zu Kronecker halte ich die Bolzanosche Schlußmethode für bindend und stütze mich auf sie. Dadurch unterscheidet sich das vorliegende Buch wesentlich von den im demselben Verlage erschienenen Vorlesungen Kroneckers über den gleichen Gegenstand.

Um wohlwollende Aufnahme meines Büchleins bittend, spreche ich noch meinen besonderen Dank Herrn Prof. H. Liebmann aus, der nicht bloß eine Korrektur gelesen, sondern auch durch sachliche Bemerkungen ein paar Irrtümer von meiner Arbeit ferngehalten hat.

Jena, im Juni 1908.

J. Thomae.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung. Hilfssätze der Funktionentheorie.

§ 1. Begriff der Funktion einer Veränderlichen 1
§ 2. Im allgemeinen wohlbestimmte Funktion. 2
§ 3. $f(x+0)$, $f(x-0)$ 2
§ 4. Durchgehend wohlbestimmte Funktion. 2
§ 5. Festsetzung über $0:0$ 3
§ 6. Obere und untere Grenze. Größte Schwankung 3
§ 7. Stetigkeit, vorwärts u. rückwärts. 4
§ 8. Stetigkeit schlechthin. Gleichmäßige Stetigkeit. 4
§ 9. Eine stetige Funktion besitzt ein Maximum und Minimum . . . 5
§ 10. Satz über durchgehend wohlbestimmte Funktionen. 5
§ 11. Monotone Zahlenreihen und monotone Funktionen 5
§ 12. Ganz monotone Funktionen . . 5
§ 13. Grenzstellen einer Zahlenmenge 5
Der Begriff „Gebiet“ 6
§ 14. $f(x \pm 0, y \pm 0)$ 6
§ 15. Obere u. untere Grenze der Funktionen zweier Veränderlichen . 7
§ 16. Stetigkeit bei 2 Veränderlichen . 7
§ 17. Gleichmäßige Stetigkeit 7
§ 18. Schätzung einer Produktensumme 8

Das Integral als Umkehrung des Differentialquotienten.

§ 19. Vorwärts- und rückwärtsgenommener Differentialquotient. . . 8
§ 20. Die Integralfunktion 8
§ 21. $w(x) = \text{Const.}$, wenn $w'(x) = 0$ ist 9
§ 22. Bestimmtheit des Integrales . . 10
§ 23. Bezeichnungen 10
§ 24. Elementare Formeln der Integralrechnung 10
§ 25. Potential eines Geradenstückes. Anziehung 11
§ 26. Erster Mittelwertsatz 12
§ 27. Verallgemeinerung. Die Taylorsche Reihe. 13
§ 28. Integration durch Teilintervalle 14

Das Integral als Grenzwert einer Summe.

§ 29. Vorläufige Definition 14
§ 30. Oberes und unteres begleitendes Integral 15

Seite

§ 31. Die kritische Summe 17
§ 32. Praktische Existenzkriterien . . 18
§ 33. Beispiele unendlich oft unstetiger integrabler Funktionen 19
Riemanns klassisches Beispiel . 20
Hankels Kondensationsprinzip . 21
§ 34. Integralauswertung durch passende Intervallteilung. Ein Integral von Poisson 23
§ 35. Erster Mittelwertsatz bei Summendefinition. 24
§ 36. Stetigkeit des Integrales . . . 24
§ 37. Differentiation des Summenintegrales 25
§ 38. Integrabilität eines Produkts. . 26
§ 39. Das Wallissche Produkt. . . . 27
§ 40. Zweiter Mittelwertsatz 27
§ 41. Partielle Integration 29
§ 42. Beispiele dafür 31
§ 43. Potential eines Rechtecks . . . 32
§ 44. Dirichlets Grenzintegral 32
§ 45. Ein besonderer Fall desselben . 34
§ 46. Differentiation n. ein. Parameter 35
§ 47. Beispiel der Auswertung durch Parameterdifferentiation 35
§ 48. Ein nicht unter dem Integralzeichen differenzierbares Integral 37
§ 49. Zulässigkeit der Differentiation unter dem Integralzeichen . . . 38
§ 50. Vertauschbarkeit der Differentiationsfolge 39
§ 51. Die Grenzen eines Integrales sind von einem Parameter abhängig 39
§ 52. Substitution 40
Indirekte Substitution. 41
§ 53. Lineare Substitutionen 42

Integrale mit unendlichen Grenzen.

§ 54. Definition des Integrales mit unendlichen Grenzen 43
§ 55. Existenzbedingungen 43
§ 56. Spezieller Fall 43
§ 57. Das logarithmische Kriterium . 43
§§ 58, 59. Beispiele 44
§ 60. Dirichlets diskontinuierlicher Faktor. 45
§ 61. Die Integrale $\int \sin(x^2)\,dx$, $\int \cos(x^2)\,dx$ 45
§ 62. Ein besonderer Fall. 46
§ 63. Lemma 46

Seite

§ 64. Grenzübergang an einem Parameter 47
§ 65. Differentiation nach einem Parameter bei unendlichen Grenzen 48
§§ 66—68. Beispiele 49
§ 69. Subtilere Fälle 51

Integration über unendlich werdende Integranden.

§ 70. Dirichlets Definition. Cauchys Hauptwert 52
§ 71. Unbedingt konvergente Integrale. Kriterien 53
§ 72. Bedingt konvergente Integrale . 54
§§ 73, 74. Integrale mit unendlich oft unendlich groß werdenden Integranden 54
§ 75. Erweiterung der Substitution . 55
§ 76. Besondere Fälle 56
§ 77. Differentiation n. ein. Parameter 57

Die Fouriersche Reihe.

§§ 78, 79. Die Methode von Lagrange 58
§ 80. Einige triogonometr. Formeln . 59
§ 81. Koeffizientenbestimmung 60
§ 82. $f(x)=1$ wird in eine Sinusreihe entwickelt 62
§ 83, 84. Beispiele von Sinusreihen . 65
§ 85. Darstellung der Riemannschen unstetigen Funktion 65
§ 86. Gliedweise Integration einer Reihe 65
§ 87. Beispiel für die Unzulässigkeit dieser Methode 66
§ 88—91. Weitere Beispiele von Sinusreihen 67
§ 92. Gliedweise Differentiation der Sinusreihe 69
§ 93. Die Cosinusreihe 71
§ 94. Beispiele 72
§ 95. Sinus- und Cosinusreihe . . . 73
§ 96. Entwickelung im Intervalle $a \cdots b$ 73
§ 97. Koeffizientenbestimmung durch Integration 74
§§ 98, 99. Summation der Fourierschen Reihe 75
§ 100. Dirichlets Bedingung 76
§ 101. Eine nicht entwickelbare stetige Funktion 78
§ 102. Weierstraß' nicht differenzierbare Funktion 80
§ 103. Riemannsche Reihen 82
§ 104. Einheitlichkeit der Fourierschen Entwickelung 83

Seite

Schwingende Saiten.

§ 105. Die Differentialgleichung der Schwingungen 83
§ 106—109. Zerlegung in Partialschwingungen 85
§ 108. Mittlere lebendige Kraft (Intensität) 86
§ 109. Die gezupfte Saite 87
Gestalt und lebendige Kraft . 88
§ 110. Die geschlagene Saite 90
§ 111. Longitudinale Schwingungen . 92

§ 112. Kroneckers gliedweise Differentiation 94
§ 113. Das Poissonsche Grenzintegral 95
Zusatz zu § 66 94

Doppelintegrale.

Beschränkung der Untersuchung . . 96
Bemerkung über den Begriff „Gebiet" 97
§ 114. Definition des Doppelintegrales 97
§ 115. Die kritische Summe. Praktische Kriterien 98
§ 116. Mittelwertsatz 100
§ 117. Aufeinanderfolgende Integrationen 100
§ 118. Polarkoordinaten 102
§ 119. Doppelintegrale mit Unendlichkeitsstellen 103
§ 120. Unendliche Integrationsgebiete 104
§ 121. Produkte einfacher Integrale als Doppelintegrale 105
§ 122. Das Laplacesche oder das Wahrscheinlichkeitsintegral . 106
§ 123. Erweiterte Laplacesche Integrale 106
Hierzu eine Berichtigung . . 182
§§ 124—127. Andere Erweiterungen des Laplaceschen Integrales . 108
§ 128. Einfache Substitutionen. Die Ivorysche Substitution 111
§ 129. Die Substitution: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 113
§§ 130, 131. Beispiele 115
§ 132. Elliptische Koordinaten . . . 116
§ 133. Besondere Fälle 118
§ 134. Das Potential eines Kreises nach Heine 118
§ 135. Gauß' Substitution 121
§ 136. Gauß' Transformation 121
§ 137. Das Potential einer elliptischen Scheibe 122
§ 138. Das Potential des Ellipsoides 123

Seite

Das Fouriersche Doppelintegral.

§ 139. Vorbereitende Bemerkungen. Kriterien 124
§§ 140, 141. Andere Kriterien . . . 125
§§ 142, 143. Das Fouriersche Integral in endlichen Intervallen . . . 126
§ 144. Ausdehnung des Integrales ins Unendliche 127
§ 145. Komplexe Form des Fourierschen Integrales 129
§ 146. Gerade u. ungerade Funktionen 130
§ 147. Beispiele 131
§ 148. Vertauschbarkeit der Integrationsfolge 133

Eulersche Integrale.

§ 149. $\mathsf{B}(a,b) = \int_0^\infty x^{a-1}(1-x)^{-a-b}\,dx$ 133
§ 150. Darstellung eines Integrales durch die B-Funktion 134
§ 151. Benachbarte B-Funktionen . . 134
§ 152. Grenzübergang zum Integral zweiter Gattung 135
§ 153. Darstellung der Fakultät oder der Γ-Funktion durch ein unendliches Produkt 136
§ 154. $fac\,(x-1)\,fac\,(x) = \pi : sin\,\pi x$. 137
§ 155. $\mathsf{B}(a,b) = fac\,(a-1)\,fac\,(b-1) : fac\,(a+b-1)$ 138
§ 156. Lemniskatische Integrale . . 138
§ 157. Formel von Gauß 140
§ 158. Die B- und Γ-Funktion . . . 140
§ 159. Die Ableitung der Fakultät . 141
§ 160. Minimum der Fakultät . . . 143
§ 161. Die logarithmische Ableitung der Fakultät 144
§ 162. Das Integral für $lg\,\Gamma'(x)$ . . . 145
§ 163. Dirichlets Darstellung derselben Funktion 146
§ 164. Das Integral für $lg\,\Gamma(x)$ . . . 147
§ 165. Die Stirlingsche Formel . . . 148
§ 166. Die Raabesche Gleichung . . 148
§ 167. Integral für $1 : \mathsf{B}(a,b)$. . . . 150
§ 168. Anwendung dieser Formel . . 151

Integration zweigliedriger Differentiale.

§ 169. Das zweigliedrige Differential 151
§ 170. Die Existenz der partiellen Ableitungen bedingt nicht die Existenz des vollständigen Differentiales 152

Seite

§ 171. Das vollständige Differential . 152
§ 172. Sind w_1, w_2 stetig, so existiert das vollständige Differential . 153
§ 173. $w_1 = 0$, $w_2 = 0$ bedingt $w =$ Const. 153
§ 174. Eine stetige Funktion ist durch ihre partiellen Ableitungen bis auf eine Konstante bestimmt. 154
§ 175. Das zweigliedrige Integral. . 154
§ 176. Teilintervalle. 155
§ 177. Integrationsmethoden 155
§ 178. Integration über eine Kurve . 155
§ 179. Abhängigkeit des zweigliedrigen Integrales vom Integrationswege 157
§ 180. Bedingungen für die Existenz des Integrales 158
§ 181. Riemanns Beweis des Cauchyschen Satzes 159
§ 182. Bedingung der Unabhängigkeit vom Integrationswege. . 161
§ 183. Beispiel 162
§ 184. Differentiation nach einem Parameter 163
§ 185. Funktionen von komplexen Veränderlichen 163
§ 186. Integration d. Funktionen einer komplexen Veränderlichen . 164
§ 187. Darstellung durch ein Randintegral 165
§ 188. Unstetige, durch das Cauchysche Integral dargestellte Funktionen 166
§ 189. Darstellung der Ableitungen der Funktionen einer komplexen Veränderlichen durch ein Randintegral 167
§ 190. Die Cauchy-Riemannsche und die Weierstraßsche Funktionentheorie 167
§ 191. Erweiterung eines Eulerschen Integrales 168
§ 192. Ein besonderer Fall. 169
§ 193. Die Sinusformel der Fakultät 170
§ 194. Ein Dirichletsches Integral . 171
§ 195. Allgemeine Integraldarstellung der Γ-Funktion. 172
§§ 196—198. Anwendungen des Cauchyschen Satzes 173
§ 199. Gauß' knotenzählendes Integral 177

Zusätze 180

Einleitung.

In den Vorlesungen über bestimmte Integrale wird die Bekanntschaft mit den Anfangsgründen und Regeln der gemeinen Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt. Mancher elementare Satz dieses Kalküls wird trotzdem hier wiederholend abgeleitet werden, in der Absicht, ihm diejenige Strenge und Allgemeinheit zu geben, die in einer ersten Vorlesung über diesen Gegenstand nicht erreicht werden kann, weil dort in erster Linie das Erlernen steht, hier das Erkennen stehen wird. Dabei werden gewisse Sätze aus der elementaren Funktionentheorie und der allgemeinen Arithmetik als bekannt vorausgesetzt. Diese Sätze sollen deshalb hier nicht erwiesen, wohl aber ausgesprochen und assertorisch zusammengestellt werden. Es folgen also zunächst einleitend einige

Hilfssätze aus der Funktionentheorie.

1) Eine Zahlenreihe $y = f(x)$ heißt im Intervalle $a \cdots b$ eine wohlbestimmte Funktion von x, wenn darin zu jedem x ein bestimmtes y gehört. Wir nehmen noch hinzu, daß zu einer wohlbestimmten Funktion eine Zahl angegeben werden könne, über die, absolut genommen, kein Wert von y hinausgehe. Wenn kein Irrtum zu fürchten ist, wird das Prädikat „wohlbestimmt“ zuweilen fortgelassen.

In dieser Definition ist nicht die Rede von der Darstellung der Funktion etwa durch einen analytischen Ausdruck. Sie kann durch Vorgänge in der Natur bestimmt sein, wie z. B. die Temperatur eines Ortes zu jeder Zeit eine bestimmte, eine Funktion der Zeit ist. Die Funktion kann durch einfache Imperative gegeben sein, wie z. B. die Dirichletsche wohlbestimmte Funktion, die für jedes rationale x zwischen Null und Eins Null, für jedes irrationale x Eins ist. Man stellt sich häufig und mit Nutzen eine Funktion graphisch dar, indem man x als Abszisse, y als Ordinate einer Kurve ansieht, die die Funktion repräsentieren soll. Diese Darstellung ist aber nicht immer in klarer Weise möglich, wie gerade das Beispiel der Dirichletschen Funktion zeigt. — Die am meisten vorkommende Bestimmungsweise von Funktionen bleibt natürlich die durch analytische Ausdrücke.

Wenn hier statt Zahl öfter das Wort „Größe“ oder „Wert“ gebraucht wird, so ist dies als ein vielfach üblicher Sprachgebrauch zu rechtfertigen. An die graphische Darstellung denkend spricht man auch von einem „Punkt“ x, von einer „Stelle“ x statt von der Zahl x.

2) Eine Funktion heißt im Intervalle $a \cdots b$ *im allgemeinen* wohlbestimmt, wenn sie in einzelnen Punkten nicht bestimmt oder endlich ist, wenn aber diese Stellen durch Intervalle, sogenannte Umgebungen jener Stellen, ausgeschaltet werden können, deren Summe beliebig klein gemacht werden kann. Diese Stellen werden *singuläre* genannt.

Die Menge dieser Punkte braucht nicht endlich zu sein, es wird z. B. die Funktion $1 : sin\,(\pi : x)$ im Intervalle 0 bis 1 eine im allgemeinen wohlbestimmte Funktion genannt werden können, obschon sie für jedes x der Form $1 : n$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, singulär ist. Ist aber die Anzahl der Stellen eine bestimmte (endliche), so ist die Funktion offenbar nach den Bestimmungen unserer Definition eine im allgemeinen wohlbestimmte.

Die Funktion $sin\,(\pi : x)$ ist in dem Intervalle von -1 bis $+1$ eine im allgemeinen wohlbestimmte, sie ist nur im Punkte Null, wo sie völlig unbestimmt ist, singulär. Sie kann durch einen einfachen Imperativ „sie soll für $x = 0$ Null sein“, zu einer wohlbestimmten gemacht werden.

3) Nähert sich für *beliebig* abnehmende h $f(x \pm h)$ stets je einem und demselben Werte, so werden diese Werte mit $f(x + 0), f(x - 0)$ bezeichnet, Werte, die unbeschadet der Wohlbestimmtheit der Funktion, von $f(x)$ verschieden sein können.

4) In einer wohlbestimmten Funktion können $f(x \pm 0)$ beliebig oft unbestimmt sein, und es können diese Werte unter sich und von $f(x)$ verschieden sein.

Die Funktion $y = lim\ arctg\ \omega x$, $lim\ \omega = +\infty$ ist für jedes x eine wohlbestimmte, wenn man für den *arcus* nur Werte zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zuläßt. Sie hat für jedes positive x den Wert $\frac{1}{2}\pi$, für jedes negative x den Wert $-\frac{1}{2}\pi$, und für $x = 0$ den Wert Null. Es ist aber $f(+0) = \frac{1}{2}\pi$, $f(-0) = -\frac{1}{2}\pi$, $f(0) = 0$.

Ist $E(x)$ die größte in x enthaltene ganze Zahl, so ist

$$E(1+0) = E(1) = 1, \quad E(1-0) = 0.$$

In der wohlbestimmten Dirichletschen Funktion des § 1 ist $f(x \pm 0)$ an keiner Stelle vorhanden.

Eine Funktion, die in einem Intervalle wohlbestimmt ist, und in der auch $f(x \pm 0)$ überall wohlbestimmt ist, mag eine *durchgehend wohlbestimmte* Funktion heißen.

5) Wird eine Funktion durch Ausdrücke gegeben, die der Analysis angehören, die aber für einzelne Werte keinen Sinn haben, so kann man sie zu einer wohlbestimmten durch Imperative machen. Die Funktion $f(x) = sin\,(\pi : x)$ wird, wie schon bemerkt wurde, eine überall wohlbestimmte durch den Imperativ, $f(0)$ soll gleich Null sein. Nähert sich ein solcher Ausdruck einem bestimmten Werte, wenn man x auf jede Weise der Unbestimmtheitsstelle nähert, so pflegt man diesen Wert ohne weiteres als den Wert von $f(x)$ anzusehen. Also man setzt $f(x) = x^2 : x$ oder $f(x) = x\,sin\,(\pi : x)$ an der Stelle $x = 0$ ohne weiteres gleich Null.

6) Eine im Intervall $a \cdots b$ wohlbestimmte Funktion besitzt eine obere Grenze G und eine untere Grenze g, und es gibt mindestens je eine Stelle, in deren Umgebung sie diesen Zahlen entweder *beliebig* nahe kommt oder sie wirklich erreicht. Die Zahl $G - g$ heißt die größte Schwankung im Intervalle. Die obere Grenze und die größte Schwankung in einem Teilintervalle (zu dem die Endpunkte hinzuzurechnen sind) ist kleiner, höchstens gleich der oberen Grenze bzw. der größten Schwankung im ganzen Intervalle. — Unter Umgebung einer Stelle verstehen wir ein Intervall, das die Stelle im Innern enthält, das aber beliebig klein sein darf.

Die Funktion $y = 4\,(a^2 - x^2)\,lim\,arctg^2\,\omega x : \pi^2$ ist in dem Intervalle von $-a$ bis $+a$ wohlbestimmt. Graphisch wird sie im allgemeinen durch die Parabel $y = a^2 - x^2$ dargestellt, die ihren Scheitel im Punkte $x = 0$, $y = a^2$ hat. Aber gerade der Scheitel gehört nicht zur Kurve, sondern es ist an seiner Stelle dort $y = 0$. Die obere Grenze dieser Funktion ist a^2, sie wird nicht erreicht, aber die Werte von y kommen ihr in der Umgebung des Punktes Null beliebig nahe. Die größte Schwankung im Intervalle ist a^2.

Die Funktion

$$y = cos\,\tfrac{1}{2}\pi x - lim\,2 : (e^{\omega x} + e^{-\omega x}), \quad lim\,\omega = \infty$$

hat in dem Intervalle von -1 bis $+1$ überall den Wert $cos\,\frac{1}{2}\pi x$, nur für $x = 0$ ist sie Null. Sie erreicht ihre obere Grenze Eins nicht, kommt ihr aber in der Umgebung des Punktes Null beliebig nahe. Die größte Schwankung ist Eins.

Die Differenz zweier Funktionswerte in einem Intervalle $a \cdots b$ ist kleiner, höchstens gleich der größten Schwankung in diesem Intervalle.

Die größte Schwankung in zwei zusammenstoßenden Intervallen ist nicht größer als die Summe der größten Schwankungen der Einzelintervalle.

7) Eine Funktion $f(x)$ heißt an der Stelle x vorwärts bzw. rückwärts stetig, wenn an jener Stelle, wie klein auch die positive Zahl σ vorgegeben sein mag, $f(x+h)-f(x)$ bzw. $f(x-h)-f(x)$ dadurch (absolut genommen) kleiner als σ gemacht werden kann, daß man h klein genug nimmt. Um anzudeuten, daß hierin h flüssig ist, d. h. daß die Bedingung nicht bloß für ein bestimmtes kleines h erfüllt sein muß, sondern auch für jedes kleinere, schreibt man die Bedingung auch so,

$$abs\,(f(x+\xi h)-f(x))<\sigma,$$

und läßt für ξ jeden echten Bruch zu. — Die Funktion heißt im Intervalle $a\cdots b$ vorwärts oder rückwärts stetig, wenn sie an jeder Stelle des Intervalles vorwärts bzw. rückwärts stetig ist. Die Funktion $E(x)$ ist überall vorwärts stetig, aber für jedes ganzzahlige x ist sie nicht rückwärts stetig.

Wir können auch sagen: Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x vorwärts stetig, wenn sich für jedes beliebig klein vorgegebene σ ein Intervall x bis $x+h$ so bestimmen läßt, daß in ihm die größte Schwankung kleiner als σ ist.

8) Stetigkeit schlechthin. Eine Funktion heißt schlechthin stetig, wenn sie überall (von den Grenzen a, b natürlich abgesehen) sowohl vorwärts als auch rückwärts stetig ist. Bei ihr läßt sich für jede Stelle eine bestimmte Umgebung angeben, in der die größte Schwankung kleiner als σ ist.

Bei einer im Intervall $a\cdots b$ stetigen Funktion kann man das Intervall in Teilintervalle von *bestimmter* (durch σ bestimmter) Größe zerlegen, so daß in jedem die größte Schwankung kleiner als σ ist, und bei jeder weiteren Verkleinerung der Intervalle bleibt. Oder es läßt sich ein Intervall von bestimmter Größe so angeben, daß die größte Schwankung in diesem Intervalle, wo es auch zwischen $a\cdots b$ hingelegt wird, kleiner als σ ist. — Heine nannte eine solche Funktion *gleichmäßig* stetig, eine Bezeichnung, die man entbehren kann, weil jede stetige Funktion auch eine gleichmäßig stetige ist.

9) Eine stetige Funktion nimmt ihre obere und ihre untere Grenze und jeden Mittelwert zwischen diesen Zahlen im Intervalle $a\cdots b$ mindestens je einmal an einer bestimmten Stelle wirklich an. Sie besitzt ein Maximum und ein Minimum.

Nach § 6 gibt es eine Stelle x_0, in deren Umgebung, wie klein diese

auch sei, $f(x)$ von der oberen Grenze G beliebig wenig verschieden ist. Dort hat sie den Wert G. Wäre nämlich $f(x_0) = G - \delta$, so würde in jeder noch so kleinen Umgebung von x_0 die größte Schwankung gleich δ, also nicht beliebig klein sein, die Funktion wäre gegen die Annahme nicht stetig an der Stelle x_0.

10) Existiert bei einer wohlbestimmten Funktion im Intervall $a \cdots b$ überall $f(x+0)$ und $f(x-0)$, ist sie also durchgehend wohlbestimmt, so läßt sich die Summe der Teilintervalle, in denen die größte Schwankung größer als die beliebig kleine Zahl σ ist, beliebig klein machen.

11) Eine Funktion heißt monoton, wenn sie entweder niemals abnimmt, oder niemals zunimmt, während x von a bis b kontinuierlich wächst. Sie besitzt „Invariabilitätszüge", wenn sie in gewissen Intervallen konstant bleibt; in solchen Intervallen, die Grenzen derselben ausgenommen, ist ihr Differentialquotient (§ 19) Null.

Analog heißt eine Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ (zunehmend) monoton, wenn für jedes n $x_{n+1} \geqq x_n$ ist. Sind die Zahlen x Stellen eines *endlichen* Intervalles, so nähern sich die Zahlen x_n mit wachsendem n einer bestimmten Zahl, ihrer Grenzzahl, als Grenze. Ähnliches gilt für abnehmend monotone Zahlenfolgen.

12) Eine Funktion heißt *ganz monoton*, wenn sie monoton ohne Invariabilitätszüge ist. Eine stetige ganz monotone Funktion ist eindeutig (monoton) umkehrbar. Eine stetige monotone Funktion ist stückweise eindeutig umkehrbar. Die Invariabilitätszüge entsprechen singulären, nämlich Unbestimmtheitsstellen, doch ist die Unbestimmtheit in bestimmten Grenzen enthalten.

13) Sind im Intervalle $a \cdots b$ unendlich viel Stellen (Punkte) gegeben $x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$, so gibt es stets mindestens eine Grenzstelle (Grenzpunkt, Häufungspunkt) x_0 der Art, daß in jeder noch so kleinen Umgebung derselben unendlich viele jener Stellen oder Punkte liegen; x_0 braucht nicht selbst zu den gegebenen Punkten zu gehören. Die Grenzstellen können selbst wieder eine unendliche Menge bilden. Die Nullstellen der Funktion $sin\,(\pi : sin\,(\pi : x))$ geben ein Beispiel hierfür.

Sind die Zahlen $x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$ in endlichen Grenzen enthalten, so gibt es unter ihnen entweder eine größte, oder es gibt eine obere Grenze G, so daß keine Zahl x größer als G ist, daß aber (unendlich viele) Zahlen unter ihnen angegeben werden können, die sich von G beliebig wenig unterscheiden. Ebenso gibt es für sie eine untere Grenze.

Funktionen zweier Veränderlichen.

Der Begriff „Intervall" in bezug auf eine Veränderliche ist ein rein arithmetischer, wenn auch mit Vorteil die graphische Darstellung desselben angewandt wird. Das Analogon dieses Begriffs in bezug auf zwei Veränderliche ist der Begriff „Gebiet". Auch bei zwei Veränderlichen xy, deren Stellen durch die Punkte einer Ebene, in der xy rechtwinklige Koordinaten sind, dargestellt werden, läßt sich vielfach der Begriff „Gebiet" rein arithmetisch fassen. Z. B. bedeuten die Ungleichungen

$$a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d$$

ein solches Gebiet, das graphisch durch ein Rechteck dargestellt wird. Oder

$$k_1^2 \leqq \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \leqq k_2^2$$

bedeutet ein Gebiet, das graphisch durch einen elliptischen Ring dargestellt wird. Es ergibt sich aber das Bedürfnis, von Gebieten zu reden, die weniger speziell sind als die eben beschriebenen. Das geschieht nun in der Regel graphisch. Man sondert von der xy Ebene durch einen oder mehrere geschlossene Kurvenzüge Teile ab, die durch diese Kurvenzüge als begrenzt angesehen werden. Soll ein solches Gebiet arithmetisch bestimmt werden, so muß man annehmen, daß die graphische Bestimmung durch Ungleichungen ersetzt werden könne. Das ist, wenn die Kurven kompliziert sind, praktisch oft mit großen Schwierigkeiten verknüpft. Jedenfalls muß man, was hier stillschweigend immer geschehen soll, annehmen, daß die Kurvenzüge wenigstens abteilungsweise durch analytische Gleichungen darstellbar seien. In der Idee aber muß man, wenn man streng sein will, die arithmetische Bestimmung graphisch gegebener Gebiete als möglich ansehen. Man würde große Unbequemlichkeiten und Weitläufigkeiten in den Kauf nehmen müssen, wollte man einzig arithmetische Gebietsbestimmungen zulassen. Wir werden deshalb, wie es allgemein üblich ist, uns der graphischen Gebietsbestimmung bedienen.

14) Gehört zu jedem Wertepaare xy in einem Gebiete T (in einem Stücke der Ebene, die durch rechtwinklige Koordinaten die Zahlen xy repräsentiert) ein bestimmter Wert von f, so heißt $f(x, y)$ eine wohlbestimmte Funktion von x und y. — In einer wohlbestimmten Funktion kann doch $f(x \pm 0, y \pm 0)$ beliebig oft unbestimmt sein. — Ist $f(x, y)$ überall Null, ausgenommen in dem Teile der xy Ebene, der von der x Achse und der Parabel $x^2 = 2py$ begrenzt ist, in dem $f(x, y) = g$ sein soll, auf dessen Rande aber f gleich Null ist, so ist für jedes gegebene k und k'

$$lim\, f(x + kh, 0 + k'h) = 0, \quad lim\, h = 0,$$

gleichwohl ist $f(+0, +0)$ unbestimmt.

15) Eine Funktion $f(x, y)$ besitzt im Gebiete T eine obere Grenze G und eine untere Grenze g und es gibt mindestens je eine Stelle $x_0 y_0$, in deren Umgebung Werte von f liegen, die sich von G bzw. g entweder beliebig wenig unterscheiden oder an der $f = G$ bzw. $= g$ ist. $G - g$ größte Schwankung. Umgebung heißt ein beliebig kleines Gebiet, das den Punkt $x_0 y_0$ im *Innern*, also nicht bloß am Rande enthält. Daß am Rande von T kleine Modifikationen dieser und einiger der noch folgenden Begriffe nötig sind, braucht nur erwähnt zu werden.

16) Die Funktion $f(x, y)$ heißt an der Stelle $x_0 y_0$ stetig, wenn bei noch so kleinem σ eine Umgebung, insbesondere ein Kreis oder Quadrat (mit dem Mittelpunkt $x_0 y_0$) angegeben werden kann, so daß die größte Schwankung in diesem Gebiet kleiner als σ wird. Ist $4\delta^2$ der Inhalt dieses Quadrates und sind $\xi\eta$ echte positive oder negative Brüche, Eins eingeschlossen, so ist bei einer stetigen Funktion

$$abs\,(f(x_0 + \xi\delta, y_0 + \eta\delta) - f(x_0, x_0)) < \sigma.$$

Die Stetigkeit von f als Funktion von x für sich, und als Funktion von y für sich reicht nicht aus zur Stetigkeit überhaupt.

Bedeutet $arc\,(x, y)$ den zwischen $-\pi$ und $+\pi$ gelegenen Winkel, den der Radiusvektor des Punktes xy mit der positiven x Achse bildet, so ist

$$(\pi^2 - arc^2\,(x, y))\sqrt[3]{1 : arc\,(x, y)} = F(x, y)$$

eine eindeutige Funktion von $x\,y$, wenn sie längs der positiven x Achse gleich Null angenommen wird. Nebenbei bemerkt läßt sich diese Funktion durch eine Fouriersche Sinusreihe mit dem Argument $arc\,(x, y)$ darstellen. In dieser Darstellung ist die Funktion längs der x Achse von selbst gleich Null. Ist noch r die positive Quadratwurzel $\sqrt{x^2 + y^2}$ und μ eine positive Zahl, so ist die Funktion

$$f(x, y) = r^\mu F(x, y)$$

an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ in jeder gegebenen Richtung stetig. Gleichwohl ist sie dort unstetig. Denn man kann nicht um den Punkt $x = 0$, $y = 0$ herum mit dem Radius δ, wie klein er auch sein mag, einen Kreis schlagen, so daß die Werte von f im Innern dieses Kreises von Null um weniger als eine Zahl σ verschieden sind. Wie klein vielmehr δ^μ auch sein mag, so läßt sich doch $arc\,(x, y)$ so klein machen, daß $\delta^\mu F(x, y)$ jede Zahl an Größe übertrifft.

17) In einer stetigen Funktion von x, y läßt sich ein Quadrat vom Inhalt $4\delta^2$ angeben, so daß die Ungleichung der Stetigkeitsbedingung erfüllt ist, wo auch der Mittelpunkt des Quadrates in T liegen mag, so daß also δ von der Lage des Quadrates unabhängig ist. Eine in T stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

Eine stetige Funktion von zwei Veränderlichen nimmt ihre obere Grenze, ihre untere Grenze, und jeden Mittelwert mindestens einmal an.

---

18) Haben die Zahlen $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ einerlei Vorzeichen, und sind $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n$ beliebige Zahlen, deren größte B, deren kleinste b ist, und ist $0 \leqq \xi \leqq 1$, so ist

$$\sum \alpha_\mu \beta_\mu = (b + \xi(B-b)) \sum \alpha_\mu .$$

Begriff des Integrales als Umkehrung des Differentialquotienten und daraus folgende Sätze.

19) Nähert sich $(w(x+h)) - w(x)| : h$ für abnehmende positive h einem bestimmten Werte $w'(x)^+$, so heißt derselbe der vorwärtsgenommene Differentialquotient von $w(x)$ an der Stelle x. Der rückwärtsgenommene Differentialquotient $w'(x)^-$ setzt ein negatives h voraus. Ist $w'(x)^+ = w'(x)^-$, so heißt diese Zahl $(w'(x))$, schlechthin der Differentialquotient oder die Ableitung von $w(x)$ an der Stelle x.

20) Gibt es eine *stetige* Funktion $w(x)$, deren vorwärts- oder rückwärtsgenommener Differentialquotient in einem Intervalle gleich $f(x)$ ist, so heißt $w(x)$ ein Integral oder die Integralfunktion von $f(x)$, und $f(x)$ heißt der Integrand. Ein Differentialquotient läßt sich an einer bestimmten Stelle bilden, in den Begriff des Integrales mischt sich stets ein Intervall ein.

Dem vorwärts- und rückwärtsgenommenen Differentialquotienten entsprechend könnte man nun auch zweierlei Integralzeichen fordern, es zeigt sich jedoch, daß hierzu kaum ein Bedürfnis vorliegt.

Ist in irgend einem Intervalle $w'(x)^+ = f(x)$ oder $w'(x)^- = f(x)$, so schreibt man

$$w(x) = \int^x f(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Hilfssatz. Ist die stetige Funktion $w(x)$ im Intervalle $a \cdots b$ so beschaffen, daß überall für ein noch so kleines positives h

$$w(x+h) - w(x) > 0$$

ist, so ist

$$w(a) < w(x) < w(b), \quad w(x_1) < w(x_2), \quad (x_2 > x_1).$$

Denn wäre $w(x_2) < w(x_1)$, so müßte die stetige Funktion $w(x)$ an einer bestimmten Stelle x' zwischen x_1 und x_2 (§ 9) ein Minimum haben. Es müßte also für einen hinreichend nahe vor x' gelegenen Wert x''

$$w(x') - w(x'') = w(x'' + x' - x'') - w(x'')$$

gegen die Voraussetzung negativ sein.

In der unstetigen Funktion

$$w(x) = x, \quad 0 \leqq x < 1; \quad w(x) = -2 + x, \quad x \geqq 1$$

ist zwar im Intervalle $0 \cdots 2$ immer $w(x+h) - w(x) > 0$ für hinreichend kleine positive h, gleichwohl hat für sie der Hilfssatz keine Geltung, denn es ist $w\left(\frac{3}{2}\right) < w\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ist unter denselben Voraussetzungen im Intervalle $a \cdots b$

$$w(x+h) - w(x) < 0,$$

so ist

$$w(a) < w(x) < w(b).$$

Daraus folgt:

Ist zwischen $a \cdots b$ der vorwärtsgenommene Differentialquotient der stetigen Funktion $w(x)$ überall positiv, so ist $w(a) < w(x) < w(b)$.

Dieser Satz läßt sich noch etwas erweitern. Er gilt nämlich offenbar auch dann, wenn $(w(x+h) - w(x)) : h$ für jedes noch so kleine h positiv ist, ohne daß vorausgesetzt zu werden braucht, daß sich der Quotient für abnehmendes h einem bestimmten Grenzwerte nähere.

21) Ist im Intervall $a \cdots b$ $w'(x)^+ = 0$ oder $w'(x)^- = 0$, und ist $w(x)$ in demselben Intervall stetig, so ist $w(a) = w(x) = w(b)$. Dirichlets Beweis (Meyer, Bestimmte Integrale, S. 27) stützt sich auf den eben ausgesprochenen Hilfssatz.

Wir bilden die beiden Funktionen

$$\varphi(x) = w(x) - w(a) + \varkappa(x-a), \quad \psi(x) = w(x) - w(a) - \varkappa(x-a),$$

die beide mit $x - a$ verschwinden. Dabei wird $\varkappa$ als positiv vorausgesetzt. Es folgt, wenn h klein genug genommen wird:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \varkappa + \frac{w(x+h) - w(x)}{h} > 0,$$

$$\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} = -\varkappa + \frac{w(x+h) - w(x)}{h} < 0,$$

und daraus, solange $a < x \leqq b$ ist, nach dem Hilfssatze:

$$\varphi(x) > 0, \quad w(x) - w(a) > -\varkappa(x-a),$$

$$\psi(x) < 0, \quad w(x) - w(a) < \varkappa(x-a),$$

$$-\varkappa(x-a) < w(x) - w(a) < \varkappa(x-a),$$

und da dies für jedes noch so kleine $\varkappa$ gilt, so folgt, w. z. b. w.,

$$w(x) = w(a).$$

Einen mehr direkten Beweis dieses Satzes, der zugleich die Schwäche des früher üblichen Verfahrens aufdeckt und beseitigt, von Ballauf findet man in Schlömilchs Zeitschrift, Jahrg. XXXXI.

Die Funktion

$$w(x) = lim\ arctg\ \omega x + lim\ \pi : (e^{\omega x} + e^{-\omega x}), \quad lim\ \omega = \infty$$

hat im Intervall $-1 \cdots +1$ überall den vorwärtsgenommenen Differentialquotienten Null, ohne daß $w(-1) = w(+1)$ wäre. Ihr mangelt die vorausgesetzte Stetigkeit. Ebenso hat die Funktion $E(x)$ des § 4 überall den vorwärtsgenommenen Differentialquotienten Null, und es ist $E(1) > E(0)$.

22) Haben im Intervalle $a \cdots b$ die beiden stetigen Funktionen $w(x)$, $\omega(x)$ denselben (gleichzeitig vorwärts- oder gleichzeitig rückwärtsgenommenen) Differentialquotienten $f(x)$, so können sich $w(x)$ und $\omega(x)$ nur um eine Konstante unterscheiden. Diese aber ist willkürlich. Ist aber $w(a) = \omega(a)$, so ist auch $w(x) = \omega(x)$.

23) Richtet man die willkürliche Integrationskonstante so ein, daß das Integral an einer bestimmten Stelle a verschwindet, so schreibt man

$$w(b) - w(a) = \int_a^b f(x)\,dx, \quad w(x) - w(a) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

und nennt den Ausdruck ein bestimmtes Integral. Die Größen a und x heißen untere und obere Grenze des Integrales. — Korrekter würde es sein, für die Grenze und die Integrationsvariable verschiedene Buchstaben zu verwenden. —

24) Die Formeln

$$\int_a^b (Af(x) + B\varphi(x))\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

gelten, wenn nur $f(x)$, $\varphi(x)$ Ableitungen stetiger Funktionen sind. In der Formel für die Integration durch Teile

$$\int_a^b f\cdot\varphi\,dx = f(b)\int_a^b \varphi\,dx - \int_a^b \left(\frac{df}{dx}\int_a^x \varphi\,dx\right)dx$$

$$= f(a)\int_a^b \varphi\,dx - \int_a^b \left(\frac{df}{dx}\int_b^x \varphi\,dx\right)dx$$

stecken eine ganze Reihe von Voraussetzungen. Davon später.

Liegen die Zahlen $a_1 a_2 \cdots a_n$ zwischen a und b, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{a_n}^b f(x)\,dx.$$

25) Die Aufsuchung einer stetigen Funktion, deren Ableitung eine gegebene Funktion ist, dürfte praktisch die fruchtbarste Methode zur Auffindung von Integralen sein. Man differenziert Funktionen, und gewinnt so durch Umkehrung eine Tafel von Integralformeln, die durch allerhand Kunstgriffe erweitert wird. Es könnte überflüssig erscheinen, ein Beispiel für diese geläufige Methode zu geben. Gleichwohl folgt ein solches, das für spätere Untersuchungen nützlich ist.

Nehmen wir, wie es für die nachfolgende Anwendung bequem ist, ξ als unabhängige Veränderliche an, so ist die (reell genommene) Funktion

$$w(\xi) = lg\,(\xi - x + \sqrt{(\xi-x)^2 + (y-\eta)^2 + z^2})$$

eine stetige Funktion von ξ, wenn die Quadratwurzel positiv genommen wird, und wenn nicht gleichzeitig $\eta = y$, $z = 0$ wird, und sie besitzt (vorwärts und rückwärts) die Ableitung

$$w'(\xi) = f(\xi) = 1 : \sqrt{(\xi-x)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}.$$

Es ist demnach, wenn nicht gleichzeitig $y = \eta$, $z = 0$ ist

$$\int_{-a}^{+a} f(\xi)\,d\xi = lg\,(a - x + \sqrt{(x-a)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}) - lg\,(-a - x + \sqrt{(x+a)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}).$$

Das Potential eines homogenen Geradenstückes. Ein gerades Linienstück der xy-Ebene, in der $\xi\eta$ laufende Koordinaten sein mögen, liege auf der Geraden $\eta = y$ zwischen $\xi = -a$ und $\xi = a$ und sei homogen mit Masse von der Dichte Eins belegt. Ein Punkt im Raume habe die rechtwinkligen Koordinaten xyz und besitze die Masse Eins. Dann ist das Potential des Geradenstückes in bezug auf jenen Punkt

$$V = \int_{a-}^{+a} f(\xi)\,d\xi,\ f(\xi) = 1 : r(\xi) = 1 : \sqrt{(\xi-x^2) + (\eta-y^2) + z^2}.$$

Daraus fließt für das Potential der Wert

$$V = lg\,(a - x + r(a)) - lg\,(-a - x + r(-a)).$$

Fällt xyz auf das Linienstück selbst, so ist das Potential nicht vorhanden, fällt es auf dessen Verlängerung, so ist

$$V = abs\ lg\,\frac{x+a}{x-a}.$$

Die Anziehung, die die Strecke auf den Punkt ausübt, läßt sich in eine sehr elegante Form bringen. Wir nehmen dabei $\eta = 0$, $z = 0$ an, was offenbar die Allgemeinheit nicht beschränkt. Es ist dann

$$r(\xi) = \sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}.$$

Es werde der Winkel, den $r(a)$ mit der positiven x-Achse einschließt, mit φ bezeichnet, der Winkel, den $r(-a)$ mit derselben Achse einschließt, mit ϑ. Dann ist $y : r(a) = \sin\varphi$, $y : r(-a) = \sin\vartheta$, $x - a = y\,\mathrm{ctg}\,\varphi$, $x + a = y\,\mathrm{ctg}\,\vartheta$. Die Komponenten der Anziehung sind nach dem Wesen des Potentials

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{r(-a)} - \frac{1}{r(a)} = \frac{\sin\vartheta - \sin\varphi}{y} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\vartheta-\varphi)\cos\frac{1}{2}(\vartheta+\varphi)}{y},$$

$$Y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y}{(a - x + r(a))\,r(a)} - \frac{y}{(-x - a + r(-a))\,r(-a)}$$

$$= \frac{\sin\varphi}{\frac{y}{\sin\varphi} - y\,\mathrm{ctg}\,\varphi} - \frac{\sin\vartheta}{\frac{y}{\sin\vartheta} - y\,\mathrm{ctg}\,\vartheta} = \frac{\sin^2\varphi}{y(1-\cos\varphi)} - \frac{\sin^2\vartheta}{y(1-\cos\vartheta)}$$

$$= \frac{2}{y}\left(\cos^2\frac{1}{2}\varphi - \cos^2\frac{1}{2}\vartheta\right) = \frac{2}{y}\sin\frac{1}{2}(\vartheta-\varphi)\sin\frac{1}{2}(\vartheta+\varphi).$$

Daraus folgt für die Anziehung

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 2\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta-\varphi) : y, \quad Y : X = tg\,\tfrac{1}{2}(\vartheta+\varphi).$$

Die Anziehung ist dieselbe als die des Kreislinienstückes, das die Strahlen $r(a)$, $r(-a)$ aus einem mit dem Radius y um xy geschlagenen Kreise herausschneiden, und die Richtung der Anziehung hälftet den von den Randstrahlen $r(a)$, $r(-a)$ gebildeten Winkel.

26) Erster Mittelwertsatz. Ist G die obere, g die untere Grenze von $f(x)$ im Intervalle $a \cdots b$, so ist

$$\int_a^b (f(x) - G)\,dx < 0, \quad \int_a^b (f(x) - g)\,dx > 0$$

nach dem Hilfssatz des § 20. Daraus folgt

$$\int_a^b g\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b G\,dx$$

oder

$$\int_a^b f(x)\,dx = (g + \xi(G-g))\,(b-a) = f(a + \xi(b-a)),$$

wo ξ ein (unbekannter) echter Bruch ist. Die letzte Form $f(a+\xi(b-a))$ ist nur zulässig, wenn $f(x)$ stetig ist.

27) Verallgemeinerter erster Mittelwertsatz. Wechselt $\varphi(x)$ im Intervalle $a \cdots b$ sein Zeichen nicht, und sind die Integrale

$$\int f\,dx, \quad \int \varphi\,dx, \quad \int f\varphi\,dx$$

vorhanden, so ist

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = (g+\xi(G-g))\int_a^b \varphi(x)\,dx = f(a+\xi(b-a))\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

worin für die letzte Form die Stetigkeit von $f(x)$ vorauszusetzen ist. — Zum Beweise betrachte man wie im vorigen Paragraphen die Integrale

$$\int (f-g)\,\varphi\,dx \quad \text{und} \quad \int (f-G)\,\varphi\,dx.$$

Anwendung. Sind $f'(x)f''(x)\cdots f^{(n+1)}(x)$ (die Ableitungen von $f(x)$ im Intervalle $x\cdots x+h$) stetige Funktionen, so ist (Taylorscher Satz)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(x+\xi h)}{1\cdot 2\cdots(n+1)}.$$

Setzt man

$$w(x) = f(z) - f(x) - (z-x)f'(x) - \frac{(z-x)^2}{1\cdot 2}f''(x) - \cdots - \frac{(z-x)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}f^{(n)}(x),$$

so folgt:

$$w'(x) = -f'(x) - (z-x)f''(x) - \cdots - \frac{(z-x)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}f^{(n)}(x) - \frac{(z-x)^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n+1)}(x)$$

$$+ f'(x) + (z-x)f''(x) + \cdots + \frac{(z-x)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}f^{(n)}(x)$$

$$= -(z-x)^n f^{(n+1)}(x) : 1\cdot 2\cdots n,$$

$$\int_x^z w'(x)\,dx = w(z) - w(x) = -\int_x^z \frac{(z-x)^n f^{(n+1)}(x)\,dx}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n},$$

$$f(z) = f(x) + \frac{(z-x)f'(x)}{2} + \cdots + \frac{(z-x)^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(x) + \frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\int_x^z (z-x)^n f^{(n+1)}(x)\,dx.$$

Nun wechselt $(z-x)^n$ im Intervalle $x\cdots z$ sein Zeichen nicht. Wendet man auf das letzte Integral den verallgemeinerten Mittelwertsatz an, und ersetzt $z-x$ durch h, so erhält man die Taylorsche Formel. Hier kann h unter der nachfolgenden Voraussetzung auch negativ genommen und die Ableitungen können als einseitige gedacht werden. Daraus folgt:

Besitzt $f(x)$ in der *Umgebung* der Stelle x einen vorwärtsgenommenen ersten und zweiten Differentialquotienten, so besitzt $f(x)$ auch einen rückwärtsgenommenen ersten Differentialquotienten, und dieser fällt mit dem

vorwärtsgenommenen zusammen. — Übrigens genügt für das Bestehen dieses Satzes schon die *Stetigkeit* des ersten Differentialquotienten. Man erkennt das, wenn man den Taylorschen Satz in die Form setzt:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h(f'(x+\xi h) - f'(x)).$$

28) Sind $a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$ zwischen $a \cdots b$ gelegene Zahlen, die der Größe nach aufeinander folgen mögen, so folgt aus der Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{b} f(x)\,dx,$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= (g_1 + \xi_1(G_1 - g_1))(a_1 - a) + (g_2 + \xi_2(G_2 - g_2))(a_2 - a_1) + \cdots \\ &\quad + (g_n + \xi_n(G_n - g_n))(b - a_{n-1}) \\ &= f(a + \xi_1(a_1 - a))(a_1 - a) + f(a_1 + \xi_2(a_2 - a_1))(a_2 - a_1) + \cdots \\ &\quad + f(a_{n-1} + \xi_n(b - a_{n-1}))(b - a_{n-1}),\end{aligned}$$

wenn g_μ untere, G_μ obere Grenze im Intervall $a_{\mu-1} \cdots a_\mu$, und ξ_μ ein echter Bruch ist. Die letzte Form hat die Stetigkeit von $f(x)$ zur Voraussetzung.

Hier kann die Teilung weiter und weiter getrieben werden, so daß das Integral sich als Grenzwert einer Summe darstellt für Teilintervalle, deren Größe gegen Null konvergiert.

Wüßte man, daß dieser Grenzwert von den ξ_μ unabhängig sei, so lieferte dieser Ausdruck eine synthetische Darstellung des Integrales.

Darstellung des Integrales als Grenzwert einer Summe und daraus folgende Sätze.

29) Definieren wir jetzt

$$\int_a^b f(x)\,dx = lim \sum (g_\mu + \xi_\mu(G_\mu - g_\mu))(a_\mu - a_{\mu-1}),$$

wo sich das Limeszeichen auf abnehmende Intervalle $a_{\mu-1} \cdots a_\mu$ bezieht, so ergeben sich zwei Fragen. Erstens die Frage, wann hat dieser Grenzwert, unabhängig von der Wahl der echten Brüche ξ einen Sinn, und zweitens, in welcher Beziehung steht das Integral zu dem gleichbezeichneten der vorigen Paragraphen.

30) Oberes und unteres begleitendes Integral. Unterliegt die Funktion $f(x)$ im Intervalle $a \cdots b$ keiner anderen Bedingung als wohlbestimmt (also auch endlich) zu sein, so nähern sich die Ausdrücke

$$\sum G_\mu(a_\mu - a_{\mu-1}), \quad \sum g_\mu(a_\mu - a_{\mu-1})$$

bestimmten Werten A und B, wenn die Intervalle sämtlich den Grenzen Null zustreben, unabhängig von der Art der Teilung. (Pasch, Leipziger Annalen, Bd. 30.) A heißt das obere, B das untere begleitende Integral der Funktion $f(x)$.

Wir beweisen zuerst, daß bei einer bestimmten Art der Teilung, die wir der Kürze halber die *Normalteilung* nennen wollen, der ausgesprochene Satz statt hat.

Wir teilen das Intervall $a \cdots b$ durch den in der Mitte liegenden Punkt $a_1^{(1)}$ in zwei gleiche Teile und setzen $\frac{1}{2}(b-a) = d_1$, $a_1^{(1)} = a + d_1$. Wir erhalten so zwei Intervalle $a \cdots a_1^{(1)}$, $a_1^{(1)} \cdots b$ von der Größe d_1. Diese Intervalle teilen wir wieder in je zwei gleiche Teile durch die Punkte $a_1^{(2)}$, $a_2^{(2)}$, $a_3^{(2)}$ und erhalten so vier Intervalle, jedes von der Größe $d_2 = \frac{1}{2} d_1$. So fahren wir mit der Zweiteilung jedes Intervalles fort. Ist $a\, a_1^{(n-1)} a_2^{(n-1)} a_3^{(n-1)} \cdots b$ die $n-1^{\text{te}}$ Teilung, deren Intervalle die Größe $d_{n-1} = (b-a) : 2^{n-1}$ haben, so gewinnen wir durch Teilung der Intervalle in je zwei gleiche Teile die n^{te} Teilung mit den Teilpunkten

$$a\, a_1^{(n)} a_2^{(n)} \cdots a_{\nu-1}^{(n)}\, b, \quad \nu = 2^n,$$

deren Intervalle die Größe $d_n = (b-a) : 2^n$ haben. Die Intervalle werden beliebig klein, wenn n groß genug genommen wird, und jede folgende Teilung enthält die Teilpunkte der voraufgehenden. Die obere Grenze der Funktion $f(x)$ im Intervall $a_\mu^{(\nu)} \cdots a_{\mu+1}^{(\nu)}$ sei $G_\mu^{(\nu)}$, die untere $g_\mu^{(\nu)}$. Dann steht zunächst nach dem Satz des § 18 fest, daß

$$g(b-a) \leqq \sum \left(a_{\mu+1}^{(\nu)} - a_\mu^{(\nu)}\right) G_\mu^{(\nu)} = A_\nu \leqq (b-a)\, G$$

ist, wenn die Summe über alle Intervalle erstreckt wird, und wenn G die obere, g die untere Grenze von $f(x)$ im Intervalle $a \cdots b$ ist. Die Zahlen A_ν sind also in endlichen Grenzen enthalten. Nach demselben Satze ist aber auch

$$\left(a_{\mu+1}^{(\nu)} - a_\mu^{(\nu)}\right) G_\mu^{(\nu)} \geqq \left(a_{\varrho+1}^{(\nu+1)} - a_\varrho^{(\nu+1)}\right) G_\varrho^{(\nu+1)} + \left(a_{\varrho+2}^{(\nu+1)} - a_{\varrho+1}^{(\nu+1)}\right) G_{\varrho+1}^{(\nu+1)},$$

wenn

$$a_\varrho^{(\nu+1)} = a_\mu^{(\nu)}, \quad a_{\varrho+2}^{(\nu+1)} = a_{\mu+1}^{(\nu)}$$

ist, und folglich ist:

$$\sum \left(a_{\mu+1}^{(\nu)} - a_\mu^{(\nu)}\right) G_\mu^{(\nu)} \geqq \sum \left(a_{\mu+1}^{(\nu+1)} - a_\mu^{(\nu+1)}\right) G_\mu^{(\nu+1)}, \quad A_{\nu+1} \leqq A_\nu$$

für jedes ν. Die Zahlen $A_1, A_2, \cdots, A_\nu, \cdots$ bilden daher eine abnehmend monotone Reihe, deren Terme niemals unter $g(b-a)$ herabsinken, und sich deshalb einer bestimmten Zahl A als Grenze nähern.

Der Beweis dafür, daß die Zahlen

$$B_\nu = \sum \left(a_{\mu+1}^{(\nu)} - a_\mu^{(\nu)}\right) g_\mu^{(\nu)}$$

sich einer bestimmten Zahl B als Grenze wachsend nähern, ist in analoger Weise zu führen.

Die Zahl A würde das obere begleitende Integral, B das untere begleitende Integral zu nennen sein, wenn noch nachgewiesen würde, daß unsere Summen bei jeder Art der Teilung zu denselben Grenzwerten führten, als bei der Normalteilung, was nun geschehen soll.

Wir teilen jetzt das Intervall $a \cdots b$ durch die aufeinanderfolgenden Punkte

$$a\, \alpha_1^{(\nu)}\, \alpha_2^{(\nu)} \cdots \alpha_{n-1}^{(\nu)}\, b$$

in kleinere Intervalle, so daß jedes Intervall kleiner als δ_ν wird, und nehmen an, daß $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_\nu \cdots$ eine gegen Null konvergierende Zahlenfolge bilden, so daß also die Teilung dadurch, daß man ν größer und größer annimmt, soweit getrieben werden kann, daß sämtliche Teilintervalle beliebig klein werden. Es ist dabei nicht nötig, daß die Teilpunkte irgend einer Teilung wieder Teilpunkte einer späteren Teilung sind. Die obere Grenze von f im Intervalle $\alpha_\mu^{(\nu)} \cdots \alpha_{\mu+1}^{(\nu)}$ sei $\Gamma_\mu^{(\nu)}$; und σ sei eine beliebig klein vorgegebene Zahl. Endlich werde

$$\sum \left(\alpha_{\mu+1}^{(\nu)} - \alpha_\mu^{(\nu)}\right) \Gamma_\mu^{(\nu)} = C_\nu$$

gesetzt. Nun sei die Normalteilung so weit getrieben, daß $A_\nu = A + \sigma_\mu$ wird, wo $\sigma_\nu < \sigma$ ist. In der Neuteilung werde der Index ϱ so groß gewählt, daß die Summe der α-Intervalle, die einen Teilpunkt der Normalteilung im Innern enthalten, kleiner als $\sigma : G$ wird. Wir zerlegen

$$C_\varrho = \sum \left(\alpha_{\mu+1}^{(\varrho)} - \alpha_\mu^{(\varrho)}\right) \Gamma_\mu^{(\varrho)}$$

in zwei Teile:

$$C_\varrho = \sum{}' \left(\alpha_{\mu+1}^{(\varrho)} - \alpha_\mu^{(\varrho)}\right) \Gamma_\mu^{(\varrho)} + \sum{}'' \left(\alpha_{\mu+1}^{(\varrho)} - \alpha_\mu^{(\varrho)}\right) \Gamma_\mu^{(\varrho)},$$

so daß die Summe Σ' über alle Intervalle der α-Teilung zu erstrecken ist, die keinen Teilpunkt der Normalteilung enthalten, Σ'' über die übrigen Intervalle. Dann ist $\Sigma'' = \sigma_\varrho''$, und σ_ϱ'' ist kleiner als σ. Die Summe Σ' aber ist kleiner als A_ν. Es ist demnach

$$C_\varrho < A + \sigma_\nu + \sigma_\varrho''.$$

Nun wählen wir den Index π so groß, daß die Intervalle der Normalteilung $\sum \left(a_{\mu+1}^{(\pi)} - a_\mu^{(\pi)}\right) G_\mu^{(\pi)}$, die Punkte der ϱ^{ten} Neuteilung im Innern enthalten, kleiner als $\sigma : G$ werden. Dann teilen wir wieder die Summe in zwei Teile

$$A_\pi = \sum \left(a_{\mu+1}^{(\pi)} - a_\mu^{(\pi)}\right) G_\mu^{(\pi)}$$
$$= \sum{}' \left(a_{\mu+1}^{(\pi)} - a_\mu^{(\pi)}\right) G_\mu^{(\pi)} + \sum{}'' \left(a_{\mu+1}^{(\pi)} - a_\mu^{(\pi)}\right) G_\mu^{(\pi)}.$$

Die Summe Σ' erstreckt sich über alle Intervalle, die keinen Teilpunkt der ϱ^{ten} Neuteilung enthalten, die Summe Σ'' über die übrigen. Die erste Summe ist kleiner als C_ϱ, die zweite ist gleich τ_π, wo $\tau_\pi < \sigma$ ist. Es ist also

$$A_\pi < C_\varrho + \tau_\pi, \quad C_\varrho > A_\pi - \tau_\pi = A + \sigma_\pi - \tau_\pi.$$

Es liegt demnach C_ϱ zwischen $A + \sigma_\nu + \sigma_\varrho''$ und $A + \sigma_\pi - \tau_\pi$ und ist, weil σ beliebig klein angenommen werden kann, von A beliebig wenig verschieden. Es ist

$$lim\, C_\varrho = A = lim \sum{}' \left(\alpha_{\mu+1}^{(\varrho)} - \alpha_\mu^{(\varrho)}\right) \Gamma_\mu^{(\varrho)}.$$

Ähnlich ergibt sich, daß

$$lim \sum \left(\alpha_{\mu+1}^{(\varrho)} - \alpha_\mu^{(\varrho)}\right) \gamma_\mu^{(\varrho)} = B$$

ist, wenn $\gamma_\mu^{(\varrho)}$ die untere Grenze von $f(x)$ im Intervalle $\alpha_\mu^{(\varrho)} \cdots \alpha_{\mu+1}^{(\varrho)}$ ist. Die Grenzwerte unserer Summe sind von der Art der Teilung unabhängig w. z. b. w. A ist das obere, B das untere begleitende Integral.

31) Ist $lim \sum (G_\mu - g_\mu)(a_{\mu+1} - a_\mu) = 0$, welchen Ausdruck wir als *kritische Summe* bezeichnen wollen, so ist $A = B$, und es ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = lim \sum G_\mu (a_{\mu+1}) - a_\mu = lim \sum g_\mu (a_{\mu+1} - a_\mu)$$
$$= lim \sum (g_\mu + \xi_\mu (G_\mu - g_\mu))(a_{\mu+1} - a_\mu)$$
$$= lim\, f(a_{\mu-1} + \xi_\mu (a_{\mu+1} - a_\mu))(a_{\mu+1} - a_\mu)$$

unabhängig von der Wahl der echten Brüche ξ und unabhängig von der Art, wie die Intervalle der Null zustreben. Ist $f(x)$ die vorwärts- oder rückwärtsgenommene Ableitung einer stetigen Funktion $w(x)$, so stimmt das Integral mit dem früher (im § 20) bestimmten überein.

Es ist nämlich

$$\sum (a_{\mu+1} - a_\mu)(g_\mu + \xi_\mu (G_\mu - g_\mu)) = \sum (a_{\mu+1} - a_\mu) g_\mu$$
$$+ \sum \xi_\mu (G_\mu - g_\mu)(a_{\mu+1} - a_\mu)$$
$$= \sum (a_{\mu+1} - a_\mu) g_\mu + \xi \sum (a_{\mu+1} - a_\mu)(G_\mu - g_\mu),$$

wo ξ ein echter Bruch ist. Der erste Teil konvergiert mit abnehmenden Intervallen gegen A, der zweite unabhängig von ξ_μ, also auch für die ξ_μ des § 28, gegen Null.

Nennen wir eine Funktion, für die die kritische Summe Null ist, eine *integrable* Funktion, so kann die Frage entstehen, ob Fälle denkbar sind, in denen die erste Definition zu einem Integrale führt, die zweite nicht, so daß also der Grenzwert nur für bestimmte Werte der ξ vorhanden ist. Man lese darüber eine Abhandlung von Köpke in den Leipziger math. Annalen, Bd. 31.

32) Die kritische Summe ist Null, $f(x)$ ist im Intervall $a \cdots b$ integrabel,

1. wenn die Funktion $f(x)$ stetig ist;
2. wenn die Funktion zwar beliebig oft (unendlich oft), unstetig oder unbestimmt ist, wenn aber die Summe der Intervalle, in denen die größte Schwankung größer als die beliebig klein vorgegebene Zahl σ ist, dadurch beliebig klein gemacht werden kann, daß man die Intervalle klein genug nimmt. Daraus folgt, daß z. B. $f(x)$ integrabel ist, wenn $f(x \pm 0)$ überall existiert (§ 10).

Ist $f(x)$ im Intervalle $a \cdots b$ eine monotone Funktion, so existiert überall $f(x \pm 0)$; eine monotone Funktion ist daher stets integrabel.

Nehmen wir an, $f(x)$ sei wachsend monoton. Die Zahlen $x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$ mögen sich zunehmend dem Werte x_0 unendlich nähern. Ebenso die wachsenden Zahlen $x_1' x_2' \cdots x_n' \cdots$. Dann nähern sich die Zahlen $f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) \cdots$ (§ 11) einer bestimmten Zahl A beliebig. Ebenso nähern sich die Zahlen $f(x_1') f(x_2') \cdots f(x_n')$ einer Zahl A' beliebig. Eine Zahl $f(x_n')$ fällt aber entweder auf eine Zahl $f(x_\nu)$ oder zwischen zwei aufeinanderfolgende Zahlen $f(x_\nu), f(x_{\nu+1})$. Da diese für wachsende ν sich beliebig wenig voneinander unterscheiden, so müssen sie sich der Zahl A beliebig nähern, es ist $A' = A$. Bei jeder Art der Annäherung von x an x_0 erhält man denselben Wert $A = f(x_0 - 0)$, $f(x_0 - 0)$ existiert. Ebenso $f(x_0 + 0)$.

Ist $E(x)$ die größte in x enthaltene ganze Zahl, so ist

$$f(x) = 1 : E\left(\frac{1}{x}\right)$$

im Intervalle $0 \cdots 1$ unendlich oft unstetig, sie ist zwischen $x = 1$ und $x = \frac{1}{2}$ (ausschließlich) gleich 1. Zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ (ausschließlich) gleich $\frac{1}{2}$, zwischen $x = \frac{1}{n}$ bis $x = \frac{1}{n+1}$ (ausschließlich) gleich $\frac{1}{n}$, usw., für $x = 0$ gleich Null. Sie wächst in unendlich vielen Sprüngen monoton von 0 bis 1, wenn x von 0 bis 1 zunimmt, ist also integrabel. Man erkennt aber auch leicht direkt, daß die kritische Summe beliebig klein wird. Denn schneidet man von 0 an ein Intervall ab von der Größe $1 : N$, wo N eine ganze Zahl ist, so ist der Beitrag dieses Intervalles zur kritischen

Summe kleiner als $1:N$. Im weiteren Verlauf hat die Funktion noch $N-1$ Sprungstellen, in deren Umgebung die größte Schwankung nicht beliebig klein, aber kleiner als Eins ist. Macht man nun die Intervalle der kritischen Summe kleiner als $1:P(N-1)$, so ist der Beitrag der Intervalle, die die Sprungstellen enthalten, zur kritischen Summe kleiner als $1:P$, und wird beliebig klein, wenn P groß genug genommen wird. Der Beitrag, den die übrigen Intervalle zur kritischen Summe liefern, ist wegen der Stetigkeit in diesen Intervallen ebenfalls beliebig klein, etwa gleich ε. Es ist deshalb

$$\sum (a_{\mu+1}-a_\mu)(G_\mu-g_\mu) < \tfrac{1}{N}+\tfrac{1}{P}+\varepsilon,$$

und kann dadurch beliebig klein gemacht werden, daß erst N, dann P groß genug angenommen wird.

33) Weitere Beispiele unendlich oft unstetiger integrabler Funktionen. Ist $f(x)=0$ im Intervall $0\cdots 1$ für irrationale x, aber gleich $1:q$, wenn $x=p:q$ in kleinster Benennung ist, so ist die Funktion in jedem noch so kleinen Intervall unendlich oft unstetig, aber integrabel und das über das Intervall von $0\cdots 1$ erstreckte Integral hat den Wert Null. Die Funktion $sin(\pi:x)$ und die Funktion $sin(\pi:sin(\pi:x))$ sind in jedem endlichen Intervalle integrabel, obgleich in der letzten unendlich oft $f(x\pm 0)$ nicht vorhanden ist. Weitere Beispiele ergibt das Hankelsche Kondensationsprinzip der Singularitäten.

Die erstgenannte Funktion hat Werte, die größer oder gleich $1:Q$ sind, wo Q eine ganze Zahl ist, an den Stellen

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ \cdots,\ \tfrac{1}{Q},\ \cdots,\ \tfrac{Q-1}{Q},$$

also für weniger als Q^2 Stellen. Teilt man nun das Intervall von 0 bis 1 in mQ^2 gleiche Teile, so kann höchstens in Q^2 dieser Intervalle, deren Summe $s=1:m$ ist, die größte Schwankung größer als $1:Q$ sein. Der Beitrag, den diese Intervalle zur kritischen Summe liefern, ist kleiner als $1:m$, weil Eins die obere Grenze von $f(x)$ und zugleich die größte Schwankung von $f(x)$ ist; denn die untere Grenze ist Null. Der Beitrag der übrigen Intervalle ist kleiner als $1:Q$. Also ist die kritische Summe kleiner als

$$(1:m)+(1:Q),$$

sie kann dadurch beliebig klein gemacht werden, daß man erst Q, dann m groß genug nimmt. — Da $f(x\pm 0)$ überall gleich Null ist, so folgt auch daraus die Integrabilität. Das Integral hat den Wert Null.

Ändert man eine integrable Funktion $f(x)$ dadurch ab, daß man eine Funktion $\varphi(x)$ dazu addiert, deren Integral Null ist, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (f(x) + \varphi(x))\,dx.$$

Ändert man insbesondere die Funktion $f(x)$ an einzelnen Stellen, z. B. an den Grenzen um endliche Werte ab, so ändert sich dadurch das Integral dieser Funktion nicht.

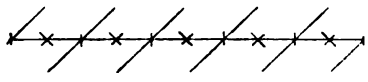
Riemanns klassisches Beispiel. Riemann bezeichnet mit (x) eine Funktion von x, die den positiven oder negativen Überschuß von x über die nächste ganze Zahl angibt, die aber den Wert Null hat, wenn x sich von der nächsten ganzen Zahl um $\pm\frac{1}{2}$ unterscheidet. Wir wollen dafür $r(x)$ schreiben. Die Funktion $r(nx)$, in der n eine ganze Zahl ist, ist (wir betrachten sie im Intervalle von 0 bis 1), überall wohlbestimmt, an den Stellen

$$x = \frac{1}{2n},\ \frac{3}{2n},\ \frac{5}{2n},\ \cdots,\ \frac{2r-1}{2n}$$

ist sie unstetig, und zwar ist an einer solchen Stelle

$$r(n(x+0)) = -\frac{1}{2},\quad r(n(x-0)) = \frac{1}{2}.$$

Von dieser Funktion machen wir uns zunächst für den Fall $n = 5$, also von der Funktion $y = r(5x)$, ein graphisches Bild. Es besteht aus



Stücken gerader Linien, die unter *arctg* 5 gegen die x Achse geneigt sind. Zu diesen Stücken kommen noch die einzelnen Punkte für $x = 1:10,\ 3:10,\ 5:10,\ 7:10,\ 9:10$, die auf die x Achse fallen.

Es ist

$$\int_0^{m:n} r(nx)\,dx = 0,$$

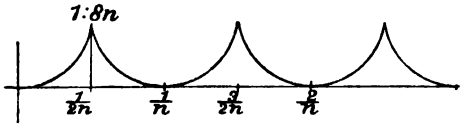
wenn m eine ganze Zahl ist, weil zu jedem kleinen Intervalle ein anderes gehört, in dem der Integrand das entgegengesetzte Zeichen hat, so daß sich die Beiträge dieser Intervalle zum Integral gegenseitig zerstören. Integriert man von 0 bis $\left(m-\frac{1}{2}\right):n$, so ist das Integral gleich $1:8n$. Da zwischen $\left(m-\frac{1}{2}\right):n$ und $\left(m+\frac{1}{2}\right):n$ $r(nx) = nx - m$ ist, so findet man, wenn x zwischen $\left(m-\frac{1}{2}\right):n$ und $\left(m+\frac{1}{2}\right):n$ liegt,

$$\int_0^x r(nx)\,dx = \frac{1}{8n} + \int_{\frac{m-\frac{1}{2}}{n}}^{x} r(nx)\,dx = \frac{n}{2}\left(x - \frac{m}{n}\right)^2.$$

Zwischen 0 und $1:2n$ ist das bis x erstreckte Integral gleich $\frac{1}{2}nx^2$. Zwischen $1:2n$ und $3:2n$ ist das Integral gleich

$$\frac{n}{2}\left(x - \frac{1}{n}\right)^2,$$

wird also graphisch durch ein Parabelstück dargestellt. Die Parabel hat ihren Scheitel im Punkte $1:n$. Der Wert des Integrales wiederholt sich periodisch, die graphische Darstellung der Integralfunktion wird demnach durch die nachfolgende Figur dargestellt



Nun bildet Riemann die unbedingt für jedes x konvergente Reihe

$$f(x) = r(x) + \frac{r(2x)}{2^2} + \frac{r(3x)}{3^2} + \cdots + \frac{r(nx)}{n^2} + \cdots,$$

die eine wohlbestimmte Funktion darstellt, die aber in jedem noch so kleinen Intervalle unstetig ist. Ist nämlich $x = p:2n$, wenn p und $2n$ keinen gemeinsamen Teiler haben, so hat dort $f(x)$ einen bestimmten Wert. Es ist aber dort, wenn über m summiert wird,

$$f(x+0) = \sum \frac{r(mx)}{m^2} + \sum \frac{r(2m+1)n(x+0)}{(2m+1)^2n^2}$$
$$= f(x) - \frac{1}{2n^2}\sum \frac{1}{(2m+1)^2} = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2},$$
$$f(x-0) = f(x) + \frac{1}{2n^2}\sum \frac{1}{(2m+1)^2} = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2}.$$

Da $f(x \pm 0)$ überall existiert, so ist die Funktion integrabel.

Die Funktion ist nach einem Prinzip gebildet, welches dem Hankelschen Kondensationsprinzip der Singularitäten ähnlich ist. Hat die Funktion $\varphi(x)$ an der Stelle $x = 0$ irgend eine Besonderheit, ist sie z. B. unstetig, oder existiert $f(\pm 0)$ nicht, so hat die Funktion $\varphi\left(x - \frac{p}{n}\right)$, in der p und n ganze Zahlen sind, dieselbe Besonderheit an der Stelle $p:n$, und die Funktion

$$\psi_n(x) = \frac{\sum_p \varphi\left(x - \frac{p}{n}\right)}{n^2}$$

hat, der Art nach, diese Besonderheit an den Stellen $p : n$, wo p alle ganzen Zahlen durchlaufen soll, die kleiner als n und teilerfremd zu n sind. Die Reihe

$$f(x) = \varphi(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x) + \cdots + \psi_n(x) + \cdots,$$

die unbedingt konvergent ist, stellt eine wohlbestimmte Funktion dar, die, der Art nach, die Besonderheit von $\varphi(x)$ im Intervalle $0 \cdots 1$ in jedem noch so kleinen Gebiete unendlich oft besitzt. Dies ist das Prinzip von Hankel.

34) Beispiele für Auswertung durch passende Teilung in Teilintervalle.

$$\int_a^b x^k\,dx = (b^k - a^k) : (k+1)$$

wird gefunden, wenn man $a_\mu = a\delta^\mu$, $\delta = \sqrt[n]{(b:a)}$ setzt, und n über alle Grenzen wachsen läßt. Dabei soll $0 < a < b$ sein.

Das Poissonsche Integral

$$w(r) = \int_0^\pi lg\,(1 - 2r\cos x + r^2)\,dx$$

wird dadurch gefunden, daß man das Intervall $0 \cdots 1$ in *gleiche* ~~Teile~~ Teile teilt, und die Wurzeln der Gleichung $r^{2n} - 1 = 0$ in Ansatz bringt. Es ist $w(r) = w(-r)$, $w(r) = 0$, solange $r < 1$ ist, $w(r) = \pi\, lg\, r^2$, wenn $r > 1$ ist. Daß auch für $r = 1$ hieraus das richtige Resultat folgt, kann erst später gezeigt werden, weil der Integrand $lg\,2(1 - \cos x)$ für $x = 0$ unendlich groß wird. Stellt man die Funktion $y = w(x)$ graphisch dar, so ergibt sie zwischen -1 und $+1$ einen Invariabilitätszug.

Beweis. Das erste dieser Integrale läßt sich aus der ersten Definition des Integrales ohne weiteres auswerten. Als Beispiel für die Methode soll es trotzdem hergeleitet werden. Es ist, wenn k eine positive ganze Zahl ist,

$$\int_a^b x^k\,dx = \sum (a\,\delta^{\mu+1} - a\,\delta^\mu)\,a^k\delta^{\mu k} = a^{k+1}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}(\delta - 1)\,\delta^{\mu(k+1)}$$

$$= a^{k+1}(\delta - 1)\,\frac{\delta^{(k+1)n} - 1}{\delta^{k+1} - 1} = \frac{(b^{k+1} - a^{k+1})\,(\delta - 1)}{\delta^{k+1} - 1}$$

$$= \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{1 + \delta + \delta^2 + \cdots + \delta^k},$$

worin mit n zur Grenze ∞ überzugehen ist. Da für diese Grenze $\delta = 1$ wird, so folgt

$$\int_a^b x^k\,dx = (b^{k+1} - a^{k+1}) : (k+1).$$

Es ist leicht zu erkennen, daß mit a zur Grenze Null übergegangen werden darf, und daß, wenn man das Integral in zwei Integrale über Teilstrecken, deren eine Grenze Null ist, zerlegt, der Punkt Null auch in dem Intervalle $a \cdots b$ liegen darf.

Beim Poissonschen Integrale teilen wir das Intervall $0 \cdots \pi$ in n gleiche Teile, und erinnern zuvor daran, daß die Gleichung $v^{2n} - 1 = 0$ die Wurzeln

$$\pm 1, \quad \cos\frac{2k\pi}{2n} + i\sin\frac{2k\pi}{2n}$$

hat, die k und $2n - k$ entsprechenden Wurzeln sind konjugiert. Für k ist $1, 2, \cdots, n-1, n+1, \cdots, 2n-1$ zu setzen. Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^\pi lg\,(1 - 2r\cos x + r^2)\,dx \\ &= lim\,\frac{\pi}{n}\left\{lg\,(1-r)^2 + lg\left(1 - 2r\cos\frac{\pi x}{n} + r^2\right)\right. \\ &\qquad \left. + lg\left(1 - 2r\cos\frac{2\pi}{n} + r^2\right) + \cdots + lg\left(1 - 2r\cos\frac{n-1}{n}\pi + r^2\right)\right\} \\ &= lim\,\frac{\pi}{n}\left\{lg\,(1-r)^2 + lg\,\frac{1-r^{2n}}{1-r^2}\right\} = w(r).\end{aligned}$$

Ist $r < 1$, so folgt

$$\int_0^\pi lg\,(1 - 2r\cos x + r^2)\,dx = lim\,\frac{\pi}{n}\left\{lg\,\frac{1-r}{1+r} + lg\,(1-r^{2n})\right\} = 0$$

Ist $r > 1$, so schreibe man

$$\begin{aligned}\int_0^\pi lg\,(1 - 2r\cos x + r^2)\,dx &= lim\,\frac{\pi}{n}\left\{lg\,\frac{r-1}{r+1} + lg\,r^{2n} + lg\left(1 - \frac{1}{r^{2n}}\right)\right\} \\ &= lim\,\frac{\pi}{n}\,n\,lg\,r^2 = \pi\,lg\,r^2.\end{aligned}$$

Später, wenn erst Integrale mit unendlich groß werdenden Integranden definiert sind, beweisen wir das schon Euler bekannte Resultat, daß das Poissonsche Integral für $r = 1$ den Wert Null hat, so daß also die aufgestellten Formeln auch für $r = 1$ richtig sind. — Stellen wir das Poissonsche Integral graphisch dar, r als Abszisse, $w = y$ als Ordinate, so erhalten wir eine Kurve, die zwischen 0 und 1 einen Invariabilitätszug hat, deren Ordinate von da ab monoton wie $2\pi\,lg\,r$ ins Unendliche verläuft.

35) Der erste Mittelwertsatz und seine Erweiterung (§ 26, § 27) bleiben bei der Summendefinition des Integrales bestehen.

Wir beweisen den Satz sofort in der allgemeineren Form. Es sei φ zwischen a und b entweder niemals < 0, oder niemals > 0. Wir setzen natürlich voraus, daß φ und $f \cdot \varphi$ integrable Funktionen seien. Alsdann ist, in geläufiger Bezeichnung,

$$\int_a^b f \cdot \varphi \, dx = lim \sum (a_{\mu+1} - a_\mu) f(a_\mu) \varphi(a_\mu),$$

und da die $\varphi(a_\mu)$ alle das gleiche Zeichen haben, so ist nach Satz 18)

$$\int_a^b f \cdot \varphi \cdot dx = (g + \xi(G-g)) \, lim \sum (a_{\mu+1} - a_\mu) \varphi(a_\mu)$$

$$= (g + \xi(G-g)) \int_a^b \varphi \, dx.$$

Ist $f(x)$ zwischen a und b, oder auch nur zwischen $a+0$ und $b-0$ stetig, so kann man schreiben:

$$\int_a^b f \cdot \varphi \cdot dx = f(a + \xi(b-a)) \int_a^b \varphi(x) \, dx,$$

wo ξ ein echter Bruch ist.

Unter *einem* Mittelwert zwischen g und G versteht man jeden zwischen diesen Zahlen gelegenen Wert, unter *dem* Mittelwert versteht man die Zahl $\frac{1}{2}(g+G)$.

36) Ist $f(x)$ zwischen $a \cdots b$ integrabel, so ist

$$w(x) = \int_a^x f(x) \, dx$$

für jeden Wert x des Intervalles stetig. Es ist

$$w(x+h) - w(x) = \int_a^{x+h} f(x) \, dx - \int_a^x f(x) \, dx = \int_x^{x+h} f(x) \, dx.$$

Dieser Ausdruck ist aber nach dem Mittelwertsatze h proportional, woraus die Stetigkeit folgt. Der Satz gilt auch für ein negatives h.

37) Ist $f(x)$ eine stetige Funktion, so ist der Differentialquotient von

$$w(x) = \int_a^x f(x) \, dx$$

schlechthin $f(x)$, und es existiert also eine stetige Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist. Sonst aber ist $w'(x)^+ = f(x+0)$, $w'(x)^- = f(x-0)$ und es existiert demnach, wenn f unstetig ist, keine Funktion, deren Differentialquotient schlechthin $f(x)$ wäre. Ist $f(x+0)$ bzw. $f(x-0)$ nicht vorhanden, so kann man nicht ohne weiteres sagen, daß der Differentialquotient von $w(x)$ nicht existiere, denn in dem Ausdrucke $w(x+h) - w(x) = hf(x+\xi h)$ ist ξ nicht ein willkürlicher, sondern ein unbekannter Bruch. Die Funktion

$$w(x) = \int_{-a}^{x} \left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) dx = x^2 \sin\frac{1}{x} + a^2 \sin\frac{1}{a}$$

hat an der Stelle $x = 0$ den Differentialquotienten Null, aber $f(\pm 0)$ existiert nicht.

Beweis des Satzes. Ist

$$w(x) = \int_{a}^{x} f(x)\, dx,$$

so folgt (h kann auch negativ sein)

$$\frac{w(x+h) - w(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(x)\, dx = g + \xi(G - g),$$

wenn g die untere, G die obere Grenze von x im Intervalle $x+0 \cdots x+h$ ist. Existiert $f(x+0)$ (bzw. $f(x-0)$), so ist der Grenzwert für abnehmende h gleich $f(x+0)$ (bzw. $f(x-0)$). Es ist demnach

$$w'(x)^+ = f(x+0), \quad w'(x)^- = f(x-0),$$

und wenn $f(x)$ stetig ist, schlechthin $w'(x) = f(x)$. In diesem Falle ist $w(x)$ eine stetige Funktion, deren vor- und rückwärtsgenommener Differentialquotient überall $f(x)$ ist, und wenn $w(x)$ mit $x - a$ verschwinden soll, so gibt es nur diese eine Funktion (§ 22).

Ist $f(x+0)$ an der Stelle x_0 von $f(x)$ verschieden, so gibt unser Summenintegral eine stetige Funktion, deren vorwärtsgenommener Differentialquotient dort $f(x_0+0)$ und nicht $f(x_0)$ ist. Ist das Summenintegral vorhanden, $f(x)$ aber unstetig, so gibt es keine stetige Funktion $w(x)$, deren vorwärtsgenommener Differentialquotient überall $f(x)$ wäre, sondern nur eine solche, deren vorwärtsgenommener Differentialquotient $f(x+0)$ ist. Ähnliches gilt in bezug auf den rückwärtsgenommenen Differentialquotienten.

Aus beiden Integraldefinitionen (§ 28, § 29) ergibt sich:

$$w(x) - w(a) = lim \sum (a_{\mu+1} - a_\mu)(g_\mu + \xi_\mu (G_\mu - g_\mu)),$$
$$w(x) - w(a) = lim \sum (a_{\mu+1} - a_\mu)(g_\mu + \xi_\mu' (G_\mu - g_\mu)),$$

worin die ξ_μ bestimmte unbekannte, die ξ_μ' willkürliche echte Brüche sind, die auf die ξ_μ fallen dürfen. Die zweite Definition aber ergibt an der Stelle x_0 vorwärts den Differentialquotienten $f(x_0+0)$, also muß die erstere Definition auf denselben führen.

Wenn aber $f(x_0 \pm 0)$ nicht existiert, so kann doch, wie wir sahen, ein bestimmter Differentialquotient vorhanden sein.

38) Das Quadrat einer integrablen Funktion ist integrabel. Das Produkt zweier integrablen Funktionen ist integrabel.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Summe integrabler Funktionen eine integrable Funktion ist und ebenso das Produkt einer integrablen Funktion in eine Konstante. — Nun sei zunächst die untere Grenze g der integrablen Funktion $f(x)$ *nicht* negativ. So ist die kritische Summe des Integrales (nach § 18)

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)\,dx &= lim \sum (a_{\mu+1}-a_\mu)(G_\mu^2 - g_\mu^2)\\ &= lim \sum (a_{\mu+1}-a_\mu)(G_\mu+g_\mu)(G_\mu-g_\mu)\\ &\leqq 2G\, lim \sum (a_{\mu+1}-a_\mu)(G_\mu-g_\mu).\end{aligned}$$

Die letzte Summe ist die kritische Summe des Integrales $\int f(x)\,dx$, und also nach der Voraussetzung Null, so daß $f^2(x)$ integrabel ist.

Jetzt sei die untere Grenze g von $f(x)$ negativ. So ist $f(x)-g$ stets positiv, und es ist, wenn $f(x)$ integrabel ist, auch

$$(f(x)-g)^2 = f^2(x) - 2gf(x) + g^2$$

integrabel. Da aber $g^2 - 2gf(x)$ für sich integrabel ist, so muß auch $f^2(x)$ integrabel sein.

Jetzt seien $f(x)$, $\varphi(x)$ integrable Funktionen, so sind auch

$$\begin{aligned}(f(x)+\varphi(x))^2 &= f^2(x) + \varphi^2(x) + 2f(x)\,\varphi(x),\\ (f(x)-\varphi(x))^2 &= f^2 + \varphi^2 - 2f\varphi\end{aligned}$$

integrable Funktionen. Ebenso ist die Differenz dieser Funktionen, also ist $f\cdot\varphi$ eine integrable Funktion.

39) Ist im Intervall $a \cdots b$ überall $f(x) \geqq \varphi(x)$, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Die Richtigkeit des Satzes folgt aus der Ungleichung

$$\int (f-\varphi)\,dx > 0.$$

Anwendung auf das Wallissche Produkt.

Im Intervalle $0 \cdots \frac{1}{2}\pi$ ist $sin^m x > sin^{m+1}(x)$. Setzt man

$$J_{2m} = \int_0^{\frac{1}{2}} sin^{2m} x\, dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m},$$

$$J_{2m+1} = \int_0^{\frac{1}{2}} sin^{2m+1} x\, dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2m}{2m+1},$$

so folgt $J_{2m-1} > J_{2m} > J_{2m+1}$. Daraus schließt man

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots.$$

Die ausführlichere Herleitung findet man in jedem Lehrbuche der Differential- und Integralrechnung.

40) Zweiter Mittelwertsatz. Ist von den beiden integrablen Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ die erste monoton, so gibt es eine solche (unbekannte) zwischen $a \cdots b$ gelegene Zahl c, daß geschrieben werden kann,

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^c \varphi(x)\,dx + f(b)\int_c^b \varphi(x)\,dx$$

$$= f(a+0)\int_a^c \varphi(x)\,dx + f(b-0)\int_c^b \varphi(x)\,dx.$$

Die Allgemeinheit der Untersuchung wird nicht beschränkt, wenn man $a < b$ voraussetzt, weil ein Integral ungeändert bleibt, wenn man die Grenzen vertauscht und das negative Zeichen vorsetzt. Wir wissen (§ 32), daß $f(x \pm 0)$ überall existieren, es kann aber $f(x)$ von $f(x-0)$, $f(x+0)$ verschieden sein. Wenn wir $b' > b$ und $\varphi(x)$ zwischen b und b' gleich Null, $f(x)$ zwischen b (einschließlich) und b' konstant annehmen, so ist

$$\int_a^{b'} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Die Funktion φ wurde als integrabel vorausgesetzt, f ist wegen der Monotonie integrabel, und also auch das Produkt $f \cdot \varphi$. Die Teilintervalle der Summendefinition nehmen wir als gleich groß, gleich $\delta = (b'-a) : n$ an. Dann ist

$$\int_a^{b'} f\varphi\,dx = \sum f(a+\delta\mu)\,\varphi(a+\delta\mu)\,\delta + \Delta,$$

wo Δ mit wachsenden n gegen Null konvergiert. Hierfür schreiben wir

$$
\begin{aligned}
&\delta f(a)\varphi(a) + \delta f(a+\delta)(\varphi(a)+\varphi(a+\delta)-\varphi(a))\\
&\quad + \delta f(a+2\delta)(\varphi(a)+\varphi(a+\delta)+\varphi(a+2\delta)-\varphi(a)-\varphi(a+\delta))+\cdots\\
&\quad + \delta f(a+\mu\delta)(\varphi(a)+\varphi(a+\delta)+\cdots\\
&\quad + \varphi(a+\mu\delta)-\varphi(a)-\varphi(a+\delta)-\cdots-\varphi(a+\overline{\mu-1}\,\delta))+\cdots\\
&\quad + \delta f(a+\overline{n-1}\,\delta)(\varphi(a)+\varphi(a+\delta)+\cdots\\
&\quad + \varphi(a+\overline{n-1}\,\delta)-\varphi(a)-\cdots-\varphi(a+\overline{n-2}\,\delta))+\Delta\\
&= \delta(f(a)-f(a+\delta))\varphi(a) + \delta(f(a+\delta)-f(a+2\delta))(\varphi(a)+\varphi(a+\delta))+\cdots\\
&\quad + \delta(f(a+\overline{n-2}\,\delta)-f(a+\overline{n-1}\,\delta))(\varphi(a)+\varphi(a+\delta)+\cdots+\varphi(a+\overline{n-2}\,\delta))\\
&\quad + \delta f(a+\overline{n-1}\,\delta)(\varphi(a)+\varphi(a+\delta)+\cdots+\varphi(a+\overline{n-1}\,\delta))+\Delta\\
&= (f(a)-f(a+\delta))\Big\{\int_a^{a+\delta}\varphi(x)\,dx+\Delta_1\Big\}\\
&\quad + (f(a+\delta)-f(a+2\delta))\Big\{\int_a^{a+2\delta}\varphi(x)\,dx+\Delta_2\Big\}+\cdots\\
&\quad + (f(a+\overline{n-2}\,\delta)-f(a+\overline{n-1}\,\delta))\Big\{\int_a^{a+\overline{n-1}\,\delta}\varphi(x)\,dx+\Delta_{n-1}\Big\}\\
&\quad + f(a+\overline{n-1}\,\delta)\Big\{\int_a^{b'}\varphi(x)\,dx+\Delta_n\Big\}+\Delta.
\end{aligned}
$$

Die Größen $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n, \Delta$ streben für wachsende n sämtlich der Grenze Null zu. Nun haben die Differenzen $f(a+\overline{\mu-1}\,\delta)-f(a+\mu\delta)$ einerlei Vorzeichen und folglich ist die Summe, abgesehen vom letzten Gliede, nach 18) gleich der Summe der Differenzen

$$\sum f(a+\overline{\mu-1}\,\delta)-f(a+\mu\delta)=f(a)-f(b')$$

multipliziert mit einem Mittelwerte der Integrale plus einem Mittelwerte der Δ. Da aber das Integral eine stetige Funktion ist, so läßt sich der Mittelwert der Integrale in die Form setzen

$$\int_a^{a+\xi'(b'-a)}\varphi(x)\,dx=\int_a^{a+\xi(b-a)}\varphi(x)\,dx=\int_a^{c}\varphi(x)\,dx,$$

wo ξ und ξ' ein echter Bruch ist. Die Summe

$$(f(a+\overline{\mu-1}\,\delta)-f(a+\mu\delta))\Delta_\mu=\Delta'$$

konvergiert für wachsende n gegen Null. Beachten wir, daß

$$f(b'-0)=f(b')=f(b)$$

ist, so folgt nun für die Grenze $n=\infty$

$$\int_a^b f\varphi\,dx = (f(a)-f(b))\int_a^{a+\xi(b-a)}\varphi(x)\,dx + f(b)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$= f(a)\int_a^{a+\xi(b-a)}\varphi(x)\,dx + f(b)\int_{a+\xi(b-a)}^b \varphi(x)\,dx.$$

Da sich der Wert des Integrales nicht ändert, wenn man $f(a)$ durch $f(a+0)$, $f(b)$ durch $f(b-0)$ ersetzt, so kann man auch schreiben

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx = f(a+0)\int_a^c \varphi(x)\,dx + f(b-0)\int_c^b \varphi(x)\,dx.$$

Wir werden den Nutzen dieses Satzes, der zuerst von du Bois-Reymond veröffentlicht worden ist, bald kennen lernen.

41) Partielle Integration. Aus der Identität

$$\sum_1^{n-1}\Big(A_\mu\sum_0^{\mu-1}B_\nu\Big) + \sum_1^{n-1}\Big(B_\mu\sum_0^{\mu-1}A_\nu\Big) + \sum_0^{n-1}A_\mu B_\mu = \sum_0^{n-1}A_\mu\sum_0^{n-1}B_\mu$$

schließt man

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b\Big(f(x)\int_a^x\varphi(x)\,dx\Big)dx + \int_a^b\Big(\varphi(x)\int_a^x f(x)\,dx\Big)dx.$$

Ist $\varphi(x)$ stetig und setzt man

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx = \psi(x), \quad \psi(a) = 0,$$

so folgt

$$\psi(b)\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx + \int_a^b\Big(\psi'(x)\int_a^x f(x)\,dx\Big)dx.$$

Hierfür kann man auch schreiben

$$(\psi(b)+C)\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,(\psi(x)+C)\,dx + \int_a^b\Big(\psi'(x)\int_a^x f(x)\,dx\Big)dx,$$

woraus folgt, daß die Annahme $\psi(a) = 0$ überflüssig ist.

Wir setzen zum Beweise

$$\int_a^{a+\mu\delta} f(x)\,dx = \sum_{0(\nu)}^{\mu-1}\delta f(a+\nu\delta) + F_\mu,$$

$$\int_a^{a+\mu\delta} \varphi(x)\,dx = \sum_{0(\nu)}^{\mu-1}\delta\varphi(a+\nu\delta) + \Phi_\mu,$$

$$f_\mu = f(a+\mu\delta), \quad \varphi_\mu = \varphi(a+\mu\delta), \quad \delta = (b-a):n,$$

dann ist

$$\int_a^b \Big(f(x)\int_a^x \varphi(x)\,dx\Big)\,dx + \int_a^b \Big(\varphi(x)\int_a^x f(x)\,dx\Big)\,dx$$
$$= \sum_{1(\mu)}^{n-1} \delta f_\mu \int_a^{a+\mu\delta} \varphi(x)\,dx + \sum_1^{n-1} \delta \varphi_\mu \int_a^{a+\mu\delta} f(x)\,dx + \varepsilon,$$

wo ε mit δ gegen Null konvergiert. Dies ist gleich

$$\sum_{1(\mu)}^{n-1} \delta f_\mu \Big(\sum_{0(\nu)}^{\mu-1} \delta \varphi_\nu + \Phi_\mu\Big) + \sum_{1(\mu)}^{n-1} \delta \varphi_\mu \Big(\sum_{0(\nu)}^{\mu-1} \delta f_\nu + F_\mu\Big) + \varepsilon.$$

Dies ist, nach der oben angeschriebenen Identität, gleich

$$\sum_{1(\mu)}^{n-1} \delta f_\mu \sum_{0(\nu)}^{\mu-1} \delta \varphi_\nu + \sum_{1(\mu)}^{n-1} \delta \varphi_\mu \sum_{0(\nu)}^{\mu-1} \delta \varphi_\nu + \sum_1^{n-1} \delta f_\mu \Phi_\mu + \sum_1^{n-1} \delta \varphi_\mu F_\mu + \varepsilon$$
$$= -\delta \sum_0^{n-1} \delta \varphi_\mu f_\mu + \sum_{0(\mu)}^{n-1} \delta f_\mu \cdot \sum_{0(\mu)}^{n-1} \delta \varphi_\mu + \sum_0^{n-1} \delta f_\mu \Phi_\mu + \sum_0^{n-1} \delta \varphi_\mu F_\mu + \varepsilon.$$

Die Produkte $f_\mu \Phi_\mu$, $\varphi_\mu F_\mu$ werden beliebig klein, wenn n über alle Grenzen wächst, und also wird jeder Mittelwert $\mathfrak{M}(f_\mu \Phi_\mu)$ von $f_\mu \Phi_\mu$, und folglich werden die Summen

$$\sum_0^{n-1} \delta f_\mu \Phi_\mu = \mathfrak{M}(f_\mu \Phi_\mu)(b-a), \quad \sum_0^{n-1} \delta \varphi_\mu F_\mu = \mathfrak{M}(\varphi_\mu F_\mu)(b-a)$$

mit wachsenden n beliebig klein. Ebenso wird $\delta \sum \delta f_\mu \varphi_\mu$ beliebig klein, weil $f \cdot \varphi$ als integrabel vorausgesetzt ist. Gehen wir nun mit n zur Grenze Unendlich über, so folgt

$$\int_a^b \Big(f(x)\int_a^x \varphi(x)\,dx\Big)\,dx + \int_a^b \Big(\varphi(x)\int_a^x f(x)\,dx\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

wie oben geschrieben ist.

Läßt man die untere Grenze a fort und ersetzt die obere durch x, so gewinnt man die übliche Formel

$$\int^x f(x)\,\psi(x)\,dx = \psi(x)\int^x f(x)\,dx - \int^x \Big(\psi'(x)\int^x f(x)\,dx\Big)\,dx,$$

in der aber links und rechts eine noch unbestimmte additive Konstante zu ergänzen ist. Sie wird erst durch Annahme einer unteren Grenze zu einer bestimmten.

Welches sind nun die Bedingungen der Gültigkeit der partiellen Integration in der Form, die den Differentialquotienten $\psi'(x)$ enthält? Es

muß ψ das Integral einer integrablen Funktion sein, und $\psi'(x)$ muß diese integrable Funktion sein. Für die Anwendungen genügt es zumeist anzunehmen, daß $\psi(x)$ schlechthin differenzierbar sei, und daß ihr Differentialquotient eine stetige Funktion von x im Integrationsintervalle sei.

42) Beispiel. Man hat, solange x zwischen 0 und 1 liegt, die Formel

$$\frac{d\,lg\,(1+\sqrt{1-x^2})}{dx} = \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Aus ihr folgt

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = lg\,x - lg\,(1+\sqrt{1-x^2}).$$

Ferner ist

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

und durch partielle Integration

$$\begin{aligned}\int lg\,x\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= -lg\,x\cdot\sqrt{1-x^2} + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx\\ &= -\sqrt{1-x^2}\,lg\,x + \int \frac{1-x^2}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= -\sqrt{1-x^2}\,lg\,x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}\\ &= -\sqrt{1-x^2}\,lg\,x + \sqrt{1-x^2} + lg\,x - lg\,(1+\sqrt{1-x^2}).\end{aligned}$$

Nun sei $0 < a < b < 1$, und die Quadratwurzel werde als positiv vorausgesetzt, so ist

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{x\,lg\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= (1-\sqrt{1-b^2})\,lg\,b - (1-\sqrt{1-a^2})\,lg\,a\\ &\quad + \sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2} - lg\,\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}\\ &= \frac{b^2}{1+\sqrt{1-b^2}}\,lg\,b - \frac{a^2}{1+\sqrt{1-a^2}}\,lg\,a + \sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2} - lg\,\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}\end{aligned}$$

und für $b = 1$, (der Integrand ist für $x = 1$ endlich),

$$\int_a^1 \frac{x\,lg\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{-a^2}{1+\sqrt{1-a^2}}\,lg\,a - \sqrt{1-a^2} + lg\,(1+\sqrt{1-a^2}).$$

Da $lim\,x\,lg\,x = 0$ ist, wenn x gegen Null konvergiert, so ist das Integral eine stetige Funktion von a für abnehmende a bis $a = 0$ einschließlich. Setzen wir also $a = 0$, so erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{x\,lg\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = lg\,2 - 1.$$

43) Das Potential eines homogenen Rechtecks. Unter 25) fanden wir für das Potential eines Linienstückes in der dortigen Lage und Bezeichnung den Wert

$$V = lg\left(a - x + \sqrt{(x-a)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}\right) - lg\left(\sqrt{(x+a)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} - x - a\right) = \frac{1}{2} lg \frac{r(a) + a - x}{r(a) + x - a} - \frac{1}{2} lg \frac{r(-a) - a - x}{r(-a) + a + x}.$$

Geben wir der Linie die Breite $d\eta$, so gibt $\int V d\eta$ zwischen den Grenzen $-b$ und $+b$ genommen, das Potential U eines homogenen Rechtecks, dessen den Koordinatenachsen parallele Seiten die Längen $2a$ und $2b$ haben und dessen Mittelpunkt der Koordinatenanfang ist, auf einen Punkt xyz. Es ist demnach das Potential U gleich

$$\frac{1}{2}\int_{-b}^{+b} lg \frac{r(a) + a - x}{r(a) - a + x} d\eta - \frac{1}{2}\int_{-b}^{+b} lg \frac{r(-a) - a - x}{r(-a) + a + x} d\eta.$$

Beide Integrale sind von gleicher Form, man erhält das zweite aus dem ersten, wenn man darin a durch $-a$ ersetzt. Wir suchen das Integral

$$\int lg \frac{r(a) + A}{r(a) - A} d\mu = \int lg \frac{r(a) + a - x}{r(a) - a + x} d\mu,$$

in dem $a - x = A$, $\eta - y = \mu$ ist, auszuwerten. Durch partielle Integration folgt

$$\int lg \frac{r(a) + A}{r(a) - A} d\mu = \mu\, lg \frac{r(a) + A}{r(a) - A} - \int \frac{\mu^2 d\mu}{r(a)(r(a) + A)} + \int \frac{\mu^2 d\mu}{r(a)(r(a) - A)}$$
$$= \mu\, lg \frac{r(a) + A}{r(a) - A} + 2A \int \frac{\mu^2 d\mu}{(\mu^2 + z^2) r(a)}$$
$$= \mu\, lg \frac{r(a) + A}{r(a) - A} + 2A \int \frac{d\mu}{r(a)} - 2Az^2 \int \frac{d\mu}{(\mu^2 + z^2) r(a)}.$$

Für die letzten Integrale liefert die elementare Integralrechnung bekannte Formeln, die man durch Differentiation leicht verifizieren kann. Es folgt

$$\int lg \frac{r(a) + A}{r(a) - A} d\mu = \mu\, lg \frac{r(a) + A}{r(a) - A} + A\, lg \frac{r(a) + \mu}{r(a) - \mu} - 2z\, arctg \frac{A\mu}{z r(a)},$$
$$\int lg \frac{r(a) + A}{r(a) - A} d\eta = (\eta - y) lg \frac{r(a) + a - x}{r(a) - a + x} + (a - x) lg \frac{r(a) + \eta - y}{r(a) - \eta + y} - 2z\, arctg \frac{(a-x)(\eta - y)}{z r(a)}.$$

Nimmt man das Integral zwischen den Grenzen $-b$ und $+b$ und zieht noch den zweiten Teil von U in Betracht, so erhält man das gesuchte Potential. Setzt man zur Abkürzung $\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ und

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = \beta \, lg \frac{\varrho + \alpha}{\varrho - \alpha} + \alpha \, lg \frac{\varrho + \beta}{\varrho - \beta} - 2\gamma \, arctg \frac{\alpha\beta}{\gamma \varrho},$$

so ergibt sich

$$2U = \Phi(a-x, b-y, z) + \Phi(a+x, b-y, z) + \Phi(a-x, b+y, z) + \Phi(a+x, b+y, z).$$

44) Ist $f(x)$ zwischen $a \ldots b$ endlich und integrabel, so folgt aus der Summendefinition

$$lim \int_a^b f(x) \sin \omega x \, dx = 0, \qquad lim \int_a^b f(x) \cos \omega x \, dx = 0,$$

wo das Zeichen *limes* bedeutet, daß ω über alle Grenzen wachsen soll.

Beweis. Es sei

$$J_\mu(\omega) = \int_{\frac{2\mu\pi}{\omega}}^{\frac{(2\mu+2)\pi}{\omega}} f(x) \sin \omega x \, dx = \int_{\frac{2\mu\pi}{\omega}}^{\frac{(2\mu+1)\pi}{\omega}} f(x) \sin \omega x \, dx + \int_{\frac{(2\mu+1)\pi}{\omega}}^{\frac{(2\mu+2)\pi}{\omega}} f(x) \sin \omega x \, dx.$$

Ein Mittelwert einer Funktion in einem Teile eines Intervalles ist zugleich ein Mittelwert im ganzen Intervalle. Ist g_μ die untere, G_μ die obere Grenze von $f(x)$ im Intervalle $2\mu\pi : \omega \ldots (2\mu+2)\pi : \omega$, so ist nach dem ersten verallgemeinerten Mittelwertsatze

$$\int_{2\mu\pi:\omega}^{(2\mu+1)\pi:\omega} f(x) \sin \omega x \, dx + \int_{(2\mu+1)\pi:\omega}^{(2\mu+2)\pi:\omega} f(x) \sin \omega x \, dx$$

$$= (g_\mu + \xi'_\mu (G_\mu - g_\mu)) \int_{2\mu\pi:\omega}^{(2\mu+1)\pi:\omega} \sin \omega x \, dx + (g_\mu + \xi''_\mu (G_\mu - g_\mu)) \int_{(2\mu+1)\pi:\omega}^{(2\mu+2)\pi:\omega} \sin \omega x \, dx,$$

und folglich ist, wenn ξ_μ, ξ'_μ, ξ''_μ echte Brüche sind,

$$J_\mu(\omega) = (g_\mu + \xi'_\mu (G_\mu - g_\mu)) \frac{1}{2} \pi : \omega - (g_\mu + \xi''_\mu (G_\mu - g_\mu) \frac{1}{2} \pi : \omega$$

$$= (\xi'_\mu - \xi''_\mu) (G_\mu - g_\mu) \frac{1}{2} \pi : \omega = \xi_\mu (G_\mu - g_\mu) \pi : \omega.$$

Zerlegen wir nun das Intervall $a \ldots b$ in Teilintervalle von $2\mu\pi : \omega$ bis $(2\mu+2)\pi : \omega$, so folgt

$$J(\omega) = \int_a^b f(x) \sin \omega x = \sum J_\mu + \Delta,$$

wenn die Summe über alle (positiven oder negativen) μ erstreckt wird, für die J_μ ein Teilintegral des Gesamtintegrales ist. Die Größe Δ rührt

von den an a und b anstoßenden kleinen Intervallen her, wenn kein Teilpunkt auf sie fällt. Demnach ist, weil $lim\ \Delta = 0$ ist,

$$\int_a^b f(x) \sin \omega x\, dx = lim \frac{1}{\pi} \sum \xi_\mu (G_\mu - g_\mu) \frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{2\pi} \xi \sum (G_\mu - g_\mu) \frac{2\pi}{\omega},$$

wo ξ ein echter Bruch ist. Da nun $f(x)$ als integrabel vorausgesetzt wurde, so hat unsere Summe, als die kritische Summe, den Grenzwert Null, womit der Satz erwiesen ist. Der Beweis für das zweite Integral mit $\cos \omega x$ ist dem gegebenen analog.

45) Das Integral

$$T(\omega) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin \omega x}{\sin x}\, dx$$

nähert sich für wachsende positive ω dem Werte $\frac{1}{2}\pi$. $lim\ T(\omega) = \frac{1}{2}\pi$. Ist $\omega = 2n + 1$, so folgt dies aus der Formel

$$\frac{\sin (2n+1)x}{\sin x} = 1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x + \cdots + 2 \cos 2nx$$

und ist daraus leicht für allgemeine ω abzuleiten. — Die obere Grenze kann durch b ersetzt werden, wenn $0 < b < \pi$ ist. — Es folgt zunächst

$$T(2n+1) = \frac{1}{2}\pi, \qquad \lim_{n=\infty} T(2n+1) = \frac{1}{2}\pi.$$

Ist $\omega = 2n + 1 + 2\varepsilon$, $-1 < 2\varepsilon < 1$, so ergibt sich

$$T(\omega) = T(2n+1) + 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin \varepsilon x}{\sin x} \cos \omega' x\, dx, \quad \omega' = \omega - \varepsilon,$$

und also nach dem voraufgehenden Paragraphen,

$$lim\ T(\omega) = \frac{1}{2}\pi.$$

Ist $0 < b < \pi$, so ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin \omega x}{\sin x}\, dx = \int_0^b \frac{\sin \omega x}{\sin x}\, dx + \int_b^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin \omega x}{\sin x}\, dx.$$

Geht man nun mit ω zur Grenze ∞ über, so findet man aus 44)

$$lim \int_0^b \frac{\sin \omega x}{\sin x}\, dx = \frac{1}{2}\pi, \quad 0 < b < \pi.$$

46) Differentiation eines Integrales nach einem Parameter. Ist $w(x, y)$ diejenige stetige Funktion, deren Differentialquotient nach x $f(x, y)$ ist, so ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_2(x, y),$$

wenn sich die Differentiationen vertauschen lassen. Ist außerdem $\partial w(x,y) : \partial y$ und ist $f_2(x, y)$ eine stetige Funktion von x, so folgt

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = \int^{x} \frac{\partial f(x,y)\,dx}{\partial y}.$$

Die Eigenschaft einer Funktion, daß sie eine Vertauschung der Differentiationsreihenfolge zuläßt, wie dies bei *analytischen* Funktionen der Fall ist, kann von anderen Eigenschaften ganz unabhängig sein. Soll irgend ein schwierigeres Integral durch die Methode der Differentiation nach einem Parameter ausgewertet werden, so ist $w(x, y)$ zunächst unbekannt und erst wenn die Integration gelungen ist, kann nachträglich erkannt werden, ob die Reihenfolge der zweiten Differentiation vertauschbar ist. Das Kriterium ist demnach wenig befriedigend. Gleichwohl wollen wir zunächst ein Beispiel der Auswertung nach dieser Methode geben und erst nachher die genaueren Bedingungen für die Richtigkeit des Satzes geben.

47) Beispiel der Auswertung durch Differentiation. Für positive y ist

$$\int_0^1 x^y\,dx = \frac{1}{y+1}.$$

Weiter sei

$$J(y) = \int_0^1 \frac{x^y - x^a}{lg\,x}\,dx, \quad y > a > 0,$$

so ist $J'(y) = 1 : (1 + y)$

$$J(y) = \int_0^1 \frac{x^y - x^a}{lg\,x}\,dx = lg\,\frac{y+1}{a+1}.$$

Die Funktion

$$x^y = e^{y\,lg\,x}$$

ist eindeutig, wenn der Logarithmus reell genommen wird. Für $x = 1$ ist $(x^y - x^a) : lg\,x$ gleich $y - a$, der Integrand ist für $x = 1$ endlich. Die Zahlen y, a wurden zunächst als positiv reell angenommen. Sind sie komplex, so muß der reelle Teil positiv sein.

Beweis. Es ist

$$\int x^y\,dx = \frac{x^{y+1}}{y+1}, \qquad \int_0^1 x^y\,dy = \frac{1}{1+y},$$

$$\frac{dJ(y)}{dy} = \int_0^1 x^y\,dx = \frac{1}{y+1}, \qquad J(y) = lg(1+y) + C,$$

$$J(a) = 0, \qquad lg(a+1) + C = 0, \qquad C = -lg\,(1+a),$$

$$J(y) = lg(1+y) - lg(1+a) = lg\,\frac{1+y}{1+a}.$$

Wir wollen das Integral auf den Fall ausdehnen, daß y, a bis zu -1 (exklusive) herabsinken. Wir setzen, ε als positiv vorausgesetzt,

$$J_\varepsilon(y) = \int_\varepsilon^1 \frac{x^y - x^a}{lg\,x}\,dx, \qquad \frac{dJ_\varepsilon(y)}{dy} = \frac{1}{1+y} - \frac{\varepsilon^{1+y}}{1+y}.$$

Durch Integration zwischen den Grenzen a und y folgt

$$J_\varepsilon(y) = lg\,\frac{1+y}{1+a} - \int_a^y \frac{\varepsilon^{1+y}}{1+y}\,dy.$$

Das letzte Integral wird, weil $1+y$ positiv ist, mit abnehmenden ε beliebig klein. Schreibt man nun hier, wo der Integrand für $x=0$ unendlich groß wird, mit Dirichlet

$$\int_0^1 \frac{x^y - x^a}{lg\,x}\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^1 \frac{x^y - x^a}{lg\,x}\,dx,$$

so folgt, daß, wenn nur $y > -1$, $a > -1$ ist, die Gleichung statthat

$$\int_0^1 \frac{x^y - x^a}{lg\,x}\,dx = lg\,\frac{1+y}{1+a}.$$

48) Beispiel eines Integrales, das nicht unter dem Integralzeichen differenziert werden kann. Wir bilden folgende Funktion $f(x, y)$. Es sei

$$f(x,1) = (1-x^2)\,abs\,x, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad f(0,0) = 0.$$

$$f(x,y) = f(ctg\,\varphi, 1) = f\left(\frac{x}{y}, 1\right), \quad \frac{1}{4}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{3}{4}\pi,$$

$$f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0, \quad \frac{3}{4}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{9}{4}\pi,$$

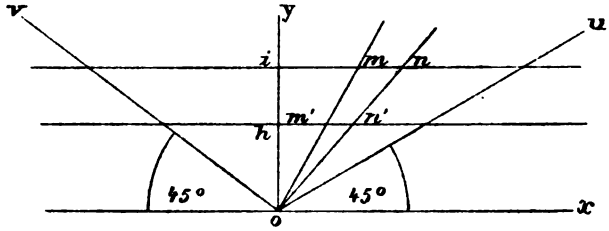
$$F(y) = \int_{-1}^{+1} f(x,y)\,dx, \quad \frac{dF}{dy} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{df(x,y)}{dy}\,dx = \int_{-1}^{+1} 0\cdot dx = 0?$$

Die Funktion $f(x, y)$ hat die Eigenschaft, daß für jeden Wert von x zwischen -1 und $+1$

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{y=0} = f_2(x, 0) = 0$$

ist. Also liefert die Differentiation unter dem Integralzeichen

$$\frac{d}{dy}\int_{-1}^{+1} f(x, y)\, dx = \int_{-1}^{+1} f_2(x, 0)\, dx = 0.$$



Unter dem i der Figur ist die Zahl Eins zu verstehen.

Andererseits aber ist

$$\int_{-1}^{+1} f(x, h)\, dx = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{x}{h}, 1\right) dx = h\int_{-1}^{+1} f(x, 1)\, dx = 2h\int_{0}^{+1} (x - x^3)\, dx = \frac{1}{2}\, h,$$

so lange h positiv und kleiner als Eins ist. Das Element mn nämlich liefert zu dem Integrale

$$\int_{-1}^{+1} f(x, 1)\, dx$$

den Beitrag $\overline{mn}\ f^{(m)}(x, 1)$, wenn $f^{(m)}(x, 1)$ den Wert von $f(x, 1)$ im Punkte m ist. Das Element $\overline{m'n'}$ liefert zu dem Integrale

$$\int_{-1}^{+1} f(x, h)\, dx$$

den Beitrag

$$\overline{m'n'}\, f^{(m')}(x, h) = \overline{m'n'}\, f^{(m)}(x, 1) = h\, \overline{mn}\, f^{(m)}(x, 1),$$

weil

$$f^{(m')}(x, h) = f^{(m)}(x, 1)$$

ist, und also ist

$$h\int_{-1}^{+1} f(x, 1)\, dx = \int_{-1}^{+1} f(x, h)\, dx.$$

Bilden wir nun den Grenzwert der Differenz

$$\frac{1}{h}\left\{\int_{-1}^{+1} f(x, h)\, dx - \int_{-1}^{+1} f(x, 0)\, dx\right\} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}\, h - 0\right) = \frac{1}{2},$$

so ergibt sich, daß derselbe nicht Null sondern $\frac{1}{2}$ ist. Dabei hat $\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{y=0}$ für alle x einen Wert, $f(x,h)$ ist integrabel, gleichwohl erhalten wir durch Differentiation unter dem Integralzeichen ein falsches Resultat.

Das Beispiel, das Harnack in seiner Differential- und Integralrechnung (Seite 282) gibt, ist nicht einwandfrei. Harnack betrachtet das Integral

$$w(y) = \int_0^1 lg(x^2+y^2)\,dx.$$

Es ist

$$\frac{d\left(x\,lg(x^2+y^2)+2y\,arctg\frac{x}{y}\right)}{dx} = 2 + lg(x^2+y^2),$$

$$\int lg(x^2+y^2)\,dx = -2x + x\,lg(x^2+y^2) + 2y\,arctg\,\frac{x}{y},$$

$$\int_0^1 lg(x^2+y^2)\,dx = -2 + lg(1+y^2) + 2y\,arctg\,\frac{1}{y} = w(y),$$

$$\frac{dw}{dy} = 2\,arctg\,\frac{1}{y}, \quad \int_0^1 \frac{d\,lg(x^2+y^2)}{dy}\,dx = \int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}\,dx.$$

Der erste Ausdruck ist für $y = 0$, wenn y abnehmend Null erreicht, gleich π, der zweite soll Null sein. Es ist aber für $x = 0$, $y = 0$ der letzte Integrand keine wohlbestimmte Funktion, weshalb der Schluß bedenklich erscheint.

49) Aus der Gleichung

$$\frac{w(x,y+h)-w(x,y)}{h} = \int_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\,dx$$

$$= \int_a^b f_2(x,y)\,dx + \int_a^b (f_2(x,y+\xi h) - f_2(x,y))\,dx,$$

in der ξ ein echter Bruch ist, folgt, daß die Differentiation unter dem Integralzeichen zulässig ist, wenn das Integral

$$\int_a^b H(x,y)\,dx, \quad H(x,y) = f_2(x,y+\xi h) - f_2(x,y),$$

für abnehmende h gleichmäßig gegen Null konvergiert. Dies ist insbesondere an der Stelle y_0 dann der Fall, wenn in dem Gebiete $a \cdots x \cdots b$, $y_0 \cdots y \cdots y_0 + \delta$, sofern nur vorwärts differenziert werden soll, oder $y_0 - \delta \cdots y \cdots y_0 + \delta$, wenn schlechthin differenziert werden soll, $f_2(x,y)$ eine stetige Funktion von x, y ist.

Hier ist zunächst vorausgesetzt, damit der Taylorsche Satz (27) anwendbar sei, daß $f_2(x, y)$ für jedes x des Intervalles $a \cdots b$ eine stetige Funktion von y sei. Dann aber soll die Gültigkeit des Satzes erwiesen werden, wenn $f_2(x, y)$ eine stetige Funktion von x und y ist (17). In diesem Falle läßt sich ein bestimmtes h so angeben, daß

$$f_2(x, y + \xi h) - f_2(x, y)$$

durchgehend beliebig klein wird, oder, wie wir oben sagten, gleichmäßig gegen Null konvergiert, und es wird daher für $lim\, h = 0$

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx.$$

50) Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge. Ist in einem Gebiete T

$$f_1(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

eine stetige Funktion von x und y, und ist ebenda

$$f_{12}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

stetig, so ist $f_{12} = f_{21}$.

Beweis. Es mögen die Zahlen x, y in T liegen, so ist

$$\int_a^x f_{12}(x, y)\, dx = \frac{\partial}{\partial y}\int_a^x f_1(x, y)\, dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y) - f(a, y)) = f_2(x, y) - f_2(a, y),$$

wenn wir annehmen, daß $f_2(x, y)$ in T existiert. Differenziert man das Integral vorwärts oder rückwärts nach x, so folgt

$$f_{12}(x \pm 0, y) = \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = f_{21}(x, y),$$

und wenn f_{12} stetig ist

$$f_{12}(x, y) = f_{21}(x, y).$$

Dies sind zwar ausreichende aber nicht notwendige Bedingungen für die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge.

51) Sind a, b, $f(x, y)$ gleichzeitig von y abhängig, so ist, wenn unterm Integralzeichen differenziert werden darf,

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\, dx = -f(a, y)\frac{da}{dy} + f(b, y)\frac{db}{dy} + \int_a^b f_2(x, y)\, dx$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß $f(x, y)$ bei a und b stetig ist.

52) Substitution. Ist $x = \varphi(y)$ eine differenzierbare Funktion von y, die monoton sich von a bis b ändert, wenn y das Intervall $\alpha \cdots \beta$ durchläuft, so ist zwischen den Grenzen $a \cdots b$

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy.$$

Vor dem Beweis ein paar Beispiele.

Durch die einfachen Substitutionen $2x$ für x, und ein andermal $\frac{1}{2}\pi - x$ findet man

$$\lim \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi} lg \sin x\,dx = \lim \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi} \left(lg\,2 + lg \sin \tfrac{1}{2}x + lg \cos \tfrac{1}{2}x\right) dx = \tfrac{1}{2}\pi\, lg\, \tfrac{1}{2},$$

$$\lim \varepsilon = 0.$$

Durch die Substitution $x = tg\,\varphi$ findet man

$$\int_0^1 \frac{lg(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} lg(1+tg\,\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} lg\sqrt{2}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}{\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{8}\pi\, lg\,2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} lg \cos\left(\tfrac{\pi}{4}-\varphi\right) d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} lg \cos\varphi\,d\varphi = \tfrac{1}{8}\pi\, lg\,2.$$

Beweis. Um die Untersuchung nicht zu komplizieren, nehmen wir an, daß $\varphi(y)$ im Intervalle $a \ldots b$ schlechthin differenzierbar sei, und daß $\varphi'(y) = \psi(y)$ eine stetige mithin integrabele Funktion sei, ist

$$\varphi(y) = a + \int_{\alpha}^{y} \psi(y)\,dy.$$

Da $\varphi(y)$ monoton ist, so entspricht jedem Werte α_μ zwischen α und β ein einziger Wert a_μ von x zwischen a und b. Das Umgekehrte ist nur dann der Fall, wenn $\varphi(y)$ *ganz* monoton ist. Weiter ist

$$a_{\mu+1} - a_\mu = \int_{\alpha_\mu}^{\alpha_{\mu+1}} \psi(y)\,dy = (\alpha_{\mu+1} - \alpha_\mu)\,\psi(\alpha_\mu + \zeta_\mu(\alpha_{\mu+1} - \alpha_\mu)).$$

Das Integral ist eine stetige Funktion seiner oberen Grenze und es wird deshalb $a_{\mu+1} - a_\mu$ mit $\alpha_{\mu+1} - \alpha_\mu$ beliebig klein, wird direkt Null, wenn $\alpha_\mu\,\alpha_{\mu+1}$ in einen Invariabilitätszugintervall fallen, wenn aber die Teilintervalle $\alpha_\mu \cdots \alpha_{\mu+1}$ das Intervall $\alpha \cdots \beta$ vollständig bedecken, so be-

decken auch die Intervalle $a_\mu \cdots a_{\mu+1}$ das Intervall $a \cdots b$ vollständig. Nun ist

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(y))\,\psi(y)\,dy$$
$$= lim \sum (\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu)\, f(a_\mu+\xi_\mu(a_{\mu+1}-a_\mu))\,\psi(\alpha_\mu+\eta_\mu(\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu)),$$

worin die echten Brüche ξ_μ durch die echten Brüche η_μ völlig bestimmt sind. Wir schreiben weiter

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(y))\,\psi(y)\,dy$$
$$= lim \sum(\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu)\, f(a_\mu+\xi_\mu(a_{\mu+1}-a_\mu))\,\psi(\alpha_\mu+\zeta_\mu(\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu))$$
$$+ lim \sum(\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu)\, f(a_\mu+\xi_\mu(a_{\mu+1}-a_\mu))\,\{\psi(\alpha_\mu+\eta_\mu(\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu))$$
$$- \psi(\alpha_\mu+\zeta_\mu(\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu))\}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\psi(\alpha_\mu+\eta_\mu(\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu)) = \psi[\eta_\mu], \qquad \psi(\alpha_\mu+\zeta_\mu(\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu)) = \psi[\zeta_\mu],$$

so folgt

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(y))\,\psi(y)\,dy$$
$$= lim \sum f(a_\mu+\xi_\mu(a_{\mu+1}-a_\mu))\,(a_{\mu+1}-a_\mu)$$
$$+ lim \sum(\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu)\, f(a_\mu+\xi_\mu(a_{\mu+1}-a_\mu))\,(\psi[\eta_\mu]-\psi[\zeta_\mu])$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + lim \sum f[\xi_\mu]\,(\psi[\eta_\mu]-\psi[\zeta_\mu])\,(\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu).$$

Der Grenzwert der letzten Summe ist aber (18) Null, so daß sich ergibt

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy = \int_a^b f(x)\,dx,$$

w. z. b. w.

Wird die Substitution indirekt gegeben, etwa durch eine Gleichung $\chi(x,y)=0$, die durch $x=a$, $y=\alpha$; $x=b$, $y=\beta$ befriedigt wird, so muß man sich überzeugen, ob auch x das Intervall $a \cdots b$ durchläuft, wenn y von α bis β wächst. Auch ist die etwa vorhandene Mehrdeutigkeit der Funktion x als Funktion von y zu beachten. Auf Vernachlässigung solcher Überlegungen beruht der bekannte Scherz, nachzuweisen, daß jedes bestimmte Integral den Wert Null hat. Es sei

$$(x-a)\,(x-b) = y, \quad y=0, \quad x=a; \quad y=0, \quad x=b.$$

So folgert man fälschlich (vgl. § 77)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^0 f(x)\,\frac{dx}{dy}\cdot dy = 0.$$

53) Durch eine lineare Substitution kann man die Grenzen a, b auf gegebene andere α, β zurückführen. Setzt man

$$x = \frac{a\beta - b\alpha + (b-a)y}{\beta - \alpha}, \quad dx = \frac{b-a}{\beta-\alpha}\,dy$$

so läuft x monoton von a bis b, wenn y von α bis β läuft. Es ist demnach

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f\left(\frac{a\beta - b\alpha + (b-a)y}{\beta-\alpha}\right) dy.$$

Ist speziell

$$\beta = a, \quad \alpha = b, \quad x = a + b - y, \quad dx = -\,dy,$$

so folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(a+b-y)\,dy = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

Setzt man

$$x = \frac{1}{y}, \quad y = \frac{1}{x}, \quad dx = -\frac{dy}{y^2},$$

so ändert sich x mit y monoton, und man erhält

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\,dy = \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\,dy.$$

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden. Enthält das Intervall $a \cdots b$ die Stelle $x = 0$ nicht so durchläuft y das endliche Intervall von $1:a$ bis $1:b$, und die Formel ist ohne weiteres richtig. Enthält aber das Intervall $a \cdots b$ die Stelle 0, so durchläuft y das Intervall $(1:a) \cdots -\infty \cdots (1:b)$. Die Formel bleibt auch in diesem Falle richtig, doch muß, um dies nachweisen zu können, erst das Integral mit unendlichen Grenzen definiert sein. Man schreibt, wenn $a < 0 < b$ ist

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\eta=0}\int_a^{-\eta} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon=0}\int_\varepsilon^b f(x)\,dx \\ &= -\lim_{\eta=0}\int_{1:a}^{-1:\eta} f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\,dy - \lim_{\varepsilon=0}\int_{1:\varepsilon}^{1:b} f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\,dy \\ &= -\int_{1:a}^{-\infty} f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\,dy + \int_{1:b}^{\infty} f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\,dy.\end{aligned}$$

Wir werden aus dem nächsten Kapitel erkennen, daß dies zulässig ist.

Integrale mit unendlichen Grenzen.

54) Wegen der Zerlegbarkeit eines Integrationsintervalles genügt es, bei Sätzen über Integration zwischen unendlichen Grenzen nur eine Grenze, etwa die obere als unendlich groß anzunehmen. Definition

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = lim \int_a^\omega f(x)\,dx = lim\, J(\omega), \quad lim\, \omega = \infty.$$

Ist $\omega' > \omega$, so ist das Integral vorhanden, wenn man, was auch $\omega' > \omega$ sein mag, ω so groß annehmen kann, daß

$$\int_\omega^{\omega'} f(x)\,dx$$

beliebig klein wird. — Die Zahlen $J(\omega)$, $J(\omega')$, $J(\omega'')$, $\cdots$ nähern sich dann nach elementaren Sätzen der Arithmetik einem bestimmten Wert, wenn ω, ω', ω'', $\cdots$ über alle Grenzen wachsen.

55) Es sei $\varrho(x)$ eine differenzierbare von einem bestimmten x an monoton gegen Null strebende Funktion, wenn x über alle Grenzen wächst, während $\varrho'(x)$ die gleiche Eigenschaft hat. Ferner sei $f(x) : \varrho'(x) = \varphi(x)$ eine mit wachsenden x endlich bleibende Funktion, so ist

$$\int_\omega^{\omega'} f(x)\,dx = \int_\omega^{\omega'} \varphi(x)\,\varrho'(x)\,dx = M \int_\omega^{\omega'} \varrho'(x)\,dx = M(\varrho(\omega') - \varrho(\omega))$$

wenn M ein Mittelwert der Funktion $\varphi(x)$ ist, beliebig klein, für hinreichend große ω, das Integral existiert und heißt *unbedingt konvergent.* — Es ist leicht zu erkennen, daß der erste Mittelwertsatz auch für ein unbedingt konvergentes bis ins Unendliche erstrecktes Integral gilt.

56) Der am meisten vorkommende Fall ist der, in dem $\varrho(x) = x^{-\alpha}$, $\varrho'(x) = -x^{-1-\alpha}\alpha$ gesetzt werden darf, wenn α eine positive Zahl ist. Die Funktion $f(x)$ wird dann, wie man sagt, in einer um ein Angebbares höheren als der ersten Ordnung, in der α^{ten} Ordnung, unendlich klein für wachsende x. Es ist dann das Integral $\int f(x)\,dx$, wenn es von a bis ins Unendliche erstreckt wird, unbedingt vorhanden, unbedingt konvergent.

57) Das Integral ist auch unbedingt konvergent, wenn bei $\alpha > 0$,

$$\varrho(x) = (lg_n(x))^{-\alpha}, \quad \varrho'(x) = -\alpha : x\, lg\, x\, lg\, lg\, x \cdots lg_{n-1}(x)\,(lg_n(x))^{1+\alpha}$$

gesetzt werden darf. Die Funktion $f(x)$ wird dann für wachsende x ebenfalls in einer höheren Ordnung als der ersten unendlich klein, aber die

Ordnung ist nicht durch eine Zahl darstellbar, sie ist niedriger als $1+\varepsilon$, wie klein auch ε sein mag.

Da $(lg_n(x))^\alpha : x^\varepsilon$ bekanntlich für jedes noch so kleine positive ε verschwindet, wenn x über alle Grenzen wächst, so sagt man, es werde $(lg_n(x))^\alpha$ zwar unendlich groß, aber nicht in einer (durch eine Zahl) angebbaren Ordnung.

58) Aus der Formel

$$\frac{d - e^{-(p+qi)x} : (p+qi)}{dx} = e^{-(p+qi)x}$$

leitet man durch Trennung des Reellen und Imaginären die beiden weiteren ab

$$\frac{d}{dx}\,\frac{-e^{-px}(p\cos qx - q\sin qx)}{p^2+q^2} = e^{-px}\cos qx,$$

$$\frac{d}{dx}\,\frac{-e^{-px}(q\cos qx + p\sin qx)}{p^2+q^2} = e^{-px}\sin qx.$$

Daraus folgt

$$\int_0^\omega e^{-px}\cos qx\,dx = -e^{-p\omega}\,\frac{p\cos q\omega - q\sin q\omega}{p^2+q^2} + \frac{p}{p^2+q^2},$$

$$\int_0^\omega e^{-px}\sin qx\,dx = -e^{-p\omega}\,\frac{q\cos q\omega + p\sin q\omega}{p^2+q^2} + \frac{q}{p^2+q^2}.$$

Man sieht hier ohne weiteres, daß man ω über alle Grenzen wachsen lassen darf, wenn p positiv ist. Es folgt für $p>0$

$$\int_0^\infty e^{-px}\cos qx\,dx = \frac{p}{p^2+q^2}, \qquad \int_0^\infty e^{-px}\sin qx\,dx = \frac{q}{p^2+q^2}.$$

59) Ein ins Unendliche erstreckte Integral kann zuweilen auch einen Sinn haben, wenn die allgemeinen Kriterien nicht erfüllt sind, wenn es nicht unbedingt integrabel ist. Das Integral

$$\int_0^\infty ((\sin \xi x) : x^\varepsilon)\,dx$$

hat z. B. einen Sinn für jedes positive ε.

Es ist ja nach dem zweiten Mittelwertsatze (§ 40)

$$\int_\omega^{\omega'} \frac{\sin \xi x}{x^\varepsilon}\,dx = \frac{1}{\omega^\varepsilon}\,\frac{\cos \xi\omega - \cos \xi\omega''}{\xi} + \frac{1}{\omega'^\varepsilon}\,\frac{\cos \xi\omega'' - \cos \xi\omega'}{\xi}$$

wo ω'' zwischen ω und ω' liegt. Dieser Ausdruck wird mit wachsenden ω beliebig klein.

Dieser Satz gilt nebenbei bemerkt auch für komplexe $\varepsilon = \alpha + \beta i$, wenn nur α positiv ist, also für das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin \xi x}{x^\alpha} e^{-i\beta \lg x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin \xi x \cos(\beta \lg x)\, dx}{x^\alpha} - i \int_0^\infty \frac{\sin \xi x \sin(\beta \lg x)\, dx}{x^\alpha}.$$

Ist speziell $\varepsilon = 1$, so erhalten wir ein interessantes und wichtiges Integral. Es sei ξ positiv, so ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin \xi x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\omega \frac{\sin x}{x} dx + \int_\omega^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\omega \frac{\sin x}{x} dx + \Delta,$$

wo Δ mit wachsenden ω gegen Null konvergiert. Ferner ist, wenn man x durch ωx ersetzt

$$\int_0^\omega \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin \omega x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin \omega x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} dx$$

$$- \int_0^1 \frac{\sin \omega x}{\sin x} dx + \int_0^1 \sin \omega x \frac{\sin x - x}{x \sin x} dx.$$

Mit Rücksicht auf 44) und 45) ergibt sich hieraus für positive ξ

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin \xi x}{x} dx = F(\xi) = \frac{1}{2}\pi, \quad F(-\xi) = -F(\xi), \quad F(0) = 0,$$

Man stelle die Funktion $\eta = F(\xi)$ graphisch dar.

60) Dirichlets diskontinuierlicher Faktor. Es ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \cos \xi x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin (1+\xi) x}{x} dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin (1-\xi) x}{x} dx.$$

Setzt man dieses Integral gleich $F(\xi) = \eta$ (man stelle $\eta = F(\xi)$ graphisch dar), so ist $\eta = \frac{1}{2}\pi$, wenn ξ zwischen -1 und $+1$ liegt, $\eta = 0$ wenn ξ außerhalb dieses Intervalles liegt, aber $\eta = \frac{1}{4}\pi$ wenn $\xi = \pm 1$ ist. Dirichlet hat in den Abhandlungen der Berliner Akademie von 1839 mit Hilfe dieses Faktors das Potential eines homogenen Ellipsoides ausgewertet.

61) Die Integranden $\sin(x^2)$, $\cos(x^2)$ werden im Unendlichen nicht unendlich klein, gleichwohl läßt sich ein Integral über sie ins Unendliche erstrecken. Denn es werden die Ausdrücke

$$\int_{\omega}^{\omega'} \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_{\omega^2}^{\omega'^2} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_{\omega}^{\omega'} \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_{\omega^2}^{\omega'^2} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

mit wachsenden ω beliebig klein. Später ergibt sich, daß beide Integrale von 0 bis ∞ erstreckt den Wert $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ haben. — Ist $\alpha > 0$ und $a > 0$, so ist das Integral

$$\int_a^{\infty} \frac{e^x \cos(e^x)}{x^\alpha}\,dx = \int_a^{\infty} \frac{d \sin e^x}{x^\alpha} = \alpha \int_a^{\infty} \frac{\sin(e^x)\,dx}{x^{1+\alpha}} - \frac{\sin(e^a)}{a^\alpha},$$

konvergent, obschon der Integrand für wachsende x unendlich groß in unendlich hoher Ordnung wird. — Die Formel wird durch partielle Integration hergestellt.

62) Ist $f(x)$ eine Funktion, die graphisch definiert wird, daß $y = f(x)$ zwischen n und $n + n^{-\mu-2}$ durch ein gleichschenkliges Dreieck dargestellt wird, dessen Höhe gleich $2n^\mu$ ist, $(\mu \geqq 1)$, die aber sonst überall gleich Null ist, so ist

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots + = \frac{1}{6}\pi^2.$$

Das Integral ist vorhanden, obschon der Integrand im Unendlichen unendlich große Werte besitzt, und sein Zeichen nirgend wechselt.

Ersetzt man $f(x)$ durch $f(x) + (1 : x^2)$, so erkennt man, daß es zur Existenz des Integrales nicht einmal nötig ist, daß der Integrand für irgend einen Wert von x verschwindet.

63) Lemma. Es sei $\nu = \sqrt[4]{n}$ und

$$\psi(x) = -n \lg\left(1 - \frac{x}{n}\right) - x = \frac{x^2}{2n} + \frac{x^3}{3n^2} + \cdots + \frac{x^m}{m n^{m-1}} + \cdots,$$

so ist

$$e^{n \lg\left(1-\frac{x}{n}\right)+x} - 1 = (1 - e^{\psi(x)}) : e^{\psi(x)}$$

$$= -\psi(x)\cdot\left(1 + \frac{\psi(x)}{1\cdot 2} + \frac{\psi^2(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right) : \left(1 + \psi(x) + \frac{\psi^2(x)}{1\cdot 2} + \frac{\psi^3(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right) = -\psi(x)\mu,$$

und μ ist für positive x kleiner als Eins. Ist nun $x = \lambda\nu$, wo λ ein echter Bruch oder 1 ist, so ist für ein großes ν

$$abs\ \nu\,(e^{-\psi(x)} - 1) = \nu\mu\psi(\lambda\nu) = \mu\left(\frac{\lambda^2}{2\nu} + \frac{\lambda^3}{3\nu^4} + \frac{\lambda^4}{4\nu^7} + \cdots\right) = \frac{\varepsilon}{\nu}, \quad \varepsilon < 1.$$

64) Enthält ein Integrand einen Parameter, von dem auch eine der Integrationsgrenzen, etwa die obere abhängt, und mit dem Parameter gleichzeitig ins Unendliche wächst, so muß die Zulässigkeit eines Grenz-

überganges, der den Parameter über alle Grenzen wachsen läßt, besonders erwiesen werden, selbst wenn sich der Grenzübergang formal leicht vollzieht. Hierfür ein Beispiel. — Es seien ab positive Zahlen, n eine ganze Zahl, so setzen wir $\nu = \sqrt[4]{(n)}$ und

$$J(a,b,n) = \int_0^n x^a \left(1-\frac{x}{n}\right)^b \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = P_n + Q_n,$$

$$P_n = \int_0^\nu x^a \left(1-\frac{x}{n}\right)^b \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx, \quad Q_n = \int_\nu^n x^a \left(1-\frac{x}{n}\right)^b \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx.$$

Behalten wir die Bezeichnung von 63) bei, so ist

$$P_n = \int_0^\nu x^a \left(1-\frac{x}{n}\right)^b e^{-x}\, dx + \int_0^\nu x^a \left(1-\frac{x}{n}\right)^b e^{-x}\left(e^{-\psi(x)}-1\right) dx.$$

Ist θ ein echter Bruch, so folgt aus dem ersten Mittelwertsatze und mit dem voraufgegangenen Lemma

$$P_n = \int_0^\nu x^a \left(1-\frac{x}{n}\right)^b e^{-x}\, dx + (\theta\nu)^a \left(1-\frac{\theta\nu}{n}\right)^b e^{-\theta\nu}\, \varepsilon : \nu.$$

Der letzte Ausdruck werde mit δ_n bezeichnet, er nähert sich, weil $(\theta\nu)^a : e^{\nu\theta}$ immer unterhalb einer bestimmten nur von a abhängenden Zahl bleibt, mit wachsenden n der Null beliebig.

Jetzt schreiben wir

$$P_n = \int_0^\nu x^a e^{-x}\, dx + \int_0^\nu x^a e^{-x}\left(\left(1-\frac{x}{n}\right)^b - 1\right) dx + \delta_n$$

und schließen daraus für wachsende n

$$lim\ P_n = \int_0^\infty x^a e^{-x}\, dx,$$

denn das daß zweite Integral für wachsende n verschwindet, ist leicht erkennbar.

Nach dem zweiten Mittelwertsatz ist, wenn ν' zwischen ν und n liegt,

$$Q_n = \left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)^n \int_\nu^{\nu'} x^a \left(1-\frac{x}{n}\right)^b dx + 0 \cdot \int_{\nu'}^n x^a \left(1-\frac{x}{n}\right)^b dx$$

$$= e^{n\,lg\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)} \int_\nu^{\nu'} x^a \left(1-\frac{x}{n}\right)^b dx.$$

Das letzte Integral verhält sich wie eine Potenz von ν, während der voraufgehende Faktor sich wie $e^{-\nu}$ verhält. Daraus geht hervor, daß Q_n für wachsende n sich der Null beliebig nähert. Wir gewinnen so den Satz

$$\lim_{n=\infty} \int_0^n x^a \left(1-\frac{x}{n}\right)^{b+n} dx = \int_0^\infty x^a e^{-x}\, dx = fac\, a$$

ist eine bestimmte von b unabhängige Größe. Der Nachweis dieses Satzes für den Fall, daß a, b komplexe Zahlen mit positiv reellem Teile sind, ist nicht wesentlich schwieriger. Dieser allgemeinere Fall ist in den Göttinger Nachrichten von 1906 Seite 504 behandelt.

65) Differentiation nach einem Parameter. Ist $f(x, y)$ unbedingt ins Unendliche integrabel, gibt es also eine wie unter 55) bestimmte Funktion $\varrho(x)$, so daß $\varphi(x) = f(x, y) : \varrho'(x)$ für wachsende x endlich bleibt. Ist ferner

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y) : \varrho'(x)}{\partial y} = \varphi_2(x, y)$$

in jedem noch so großen Intervall für x, und in dem Intervalle $y_0 - \delta$ bis $y_0 + \delta$ eine stetige Funktion von x und y, und unbedingt ins Unendliche integrabel, so ist

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx, \quad \frac{dF(y)}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx,$$

wenn y in der Umgebung der Stelle y_0 liegt.

Beweis. Es ist, wenn y für y_0 geschrieben wird,

$$\frac{F(y+h) - F(y)}{h} = \lim_{\omega=\infty} \int_a^\omega \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx + \lim_{\omega=\infty} \int_a^\omega \left(\frac{\partial f(x, y+\xi h)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) dx$$

$$= \int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx + \int_a^\infty \left(\frac{\partial f(x, y+\xi h)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) dx.$$

Das zweite Integral setzen wir gleich

$$\int_a^\omega \left(\frac{\partial f(x, y+\xi h)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) dx + \int_\omega^\infty (\varphi_2(x, y+\xi h) - \varphi_2(x, y))\, \varrho'(x)\, dx.$$

Hierin können wir nach den gemachten Annahmen ω so groß annehmen, daß das zweite Integral beliebig klein wird, dann h so klein, daß das erste beliebig klein wird. Der Grenzwert von $(F(y+h) - F(y)) : h$, der Differentialquotient des Integrales ist demnach das Integral über den nach y differenzierten Integranden.

Diese Bedingungen könnten durch etwas weniger beschränkende ersetzt werden, genügen aber dem praktischen Bedürfnisse.

Sollen nicht unbedingt konvergente Integrale nach einem Parameter differenziert werden, so muß die Zulässigkeit besonders untersucht werden.

66) Das Integral

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-yx}}{x}\, dx$$

ist für jedes positive y unter dem Integralzeichen differenzierbar, woraus folgt

$$\frac{dF(y)}{dy} = \int_0^\infty e^{-yx}\, dx = \frac{1}{y}, \quad F(y) = lg\, y.$$

Die Integrationskonstante wurde dadurch bestimmt, daß man $y = 1$ setzte.

67) Ist der Integrand $e^{-yx} \sin qx : x$, so sind die Bedingungen 65) ebenfalls erfüllt. Man erhält, so lange $y > 0$ ist, unter Berücksichtigung von 20), wenn q positiv ist,

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-yx} \sin qx}{x}\, dx, \quad \frac{dF(y)}{dy} = -\int_0^\infty e^{-yx} \sin qx\, dx = -\frac{q}{q^2 + y^2},$$

$$F(y) = \frac{1}{2}\pi - arctg\, \frac{y}{q}.$$

Die Integrationskonstante erhält man dadurch, daß man y über alle Grenzen wachsen läßt. Da y positiv vorausgesetzt wurde, so ist es fraglich, ob man hierin $y = 0$ setzen darf. Die Zulässigkeit ergibt sich durch den Nachweis, daß das Integral eine stetige Funktion von y für positive y bis $y = 0$ einschließlich ist. Dadurch erhält man noch einmal das Resultat, das unter 59) gegeben ist.

Dazu ist also nachzuweisen, daß

$$\int_0^\infty \frac{e^{-yx} - 1}{x} \sin qx\, dx$$

mit abnehmenden y gegen Null konvergiert. Die Funktion $(e^{-yx} - 1) : x$ gleich

$$\frac{1 - e^{yx}}{xe^{yx}} = -y \frac{\left(1 + \frac{xy}{1 \cdot 2} + \frac{(xy)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\right)}{1 + xy + \frac{(xy)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(xy)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots}$$

ist für positive xy eine monoton abnehmende Funktion, weil der Nenner schneller wächst als der Zähler. Also ist nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int_0^\infty \frac{e^{-yx}-1}{x} \sin qx\,dx = -y\int_0^{\lambda\omega} \sin qx\,dx + \frac{1-e^{\omega y}}{\omega e^{\omega y}}\int_{\lambda\omega}^\infty \sin qx\,dx$$

wo λ ein echter Bruch ist. Das zweite Glied rechts konvergiert mit wachsenden ω gegen Null, das erste ist gleich $-y\xi:q$, wenn ξ ein echter Bruch ist. Der Ausdruck konvergiert, w. z. b. w., mit abnehmendem y gegen Null.

68) Das Integral

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{y^2}{x^2}\right)}\,dx = y\int_0^\infty \frac{e^{-\left(x^2+\frac{y^2}{x^2}\right)}}{x^2}\,dx$$

genügt für $y > 0$ den Bedingungen der Differentiation unter dem Integralzeichen, so daß

$$\frac{dF(y)}{dy} = -2y\int_0^\infty \frac{e^{-\left(x^2+\frac{y^2}{x^2}\right)}}{x^2}\,dx = -2F(y)$$

ist. Die Funktion $F(y)$ verschwindet für keinen positiven Wert von y und es ist deshalb nicht bloß $F(y)$, sondern auch $lg\,F(y)$ eine stetige Funktion von y, so daß

$$\frac{d\,lg\,F(y)}{dy} = -2,\quad lg\,F(y) = -2y + lg\,K,\quad F(y) = Ke^{-2y}$$

ist. Die Konstante K hat den Wert $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, kann aber erst später bestimmt werden. Der Nachweis, daß die Gleichung auch noch für $y = 0$ richtig ist, wird wieder dadurch geführt, daß man beweist, daß das Integral eine *stetige* Funktion von y bis $y = 0$ herab einschließlich ist. Da $F(-y) = F(y)$ ist, so wird unser Integral graphisch durch eine Kurve dargestellt, die für $y = 0$ eine Ecke hat, der vorwärtsgenommene Differentialquotient ist also dort von dem rückwärtsgenommenen verschieden. Die Winkel, die die Kurve an der Stelle $y = 0$ mit der positiven y-Achse (die hier Abszissenachse ist) einschließt sind $\pm\,arctg\,\sqrt{\pi}$.

Um die Stetigkeit des Integrales $F(y)$ an der Stelle $y = 0$ nachzuweisen, muß man zeigen, daß

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\left(e^{-\frac{y^2}{x^2}}-1\right)dx = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{\left(e^{-y^2x^2}-1\right)}{x^2}\,dx = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{1-e^{y^2x^2}}{x^2e^{y^2x^2}}\,dx$$

mit abnehmenden y gegen Null konvergiert. Es ist aber $(1-e^{y^2x^2}):x^2e^{y^2x^2}$

nach der Schlußweise des § 68) gleich $-y^2 \cdot \chi(xy)$, wo $\chi(xy)$ eine monoton abnehmende Funktion ist. Nun können wir in den Integralen

$$-y^2 \int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{x^2}} \chi(xy)\,dx + \int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{(e^{-y^2x^2}-1)}{x^2}\,dx$$

erst ω so groß annehmen, daß wegen des Nenners x^2, der zweite Teil beliebig klein wird, dann y so klein, daß der erste Teil beliebig klein wird. Daraus folgt die Stetigkeit.

69) Die Untersuchung, ob ein Integral mit unendlichen Grenzen unter dem Integralzeichen nach einem Parameter differenziert werden darf, wenn die Bedingungen unter 65) nicht alle erfüllt sind, ist zuweilen subtil. Es folgt ein Beispiel.

Ist $\cos yx : (k^2+x^2)$ der Integrand, so ist das ins Unendliche erstreckte Integral unbedingt, der Differentialquotient aber nur noch schlechthin konvergent, und es ist deshalb eine Spezialbetrachtung notwendig. Es sei

$$\frac{F(y+h)-F(y)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^{\infty} \frac{\cos(y+h)x - \cos yx}{x^2+k^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^{\infty} \frac{\cos yx\,(\cos hx - 1) - \sin yx \sin hx}{x^2+k^2}\,dx$$

$$= -\frac{2}{h}\int_0^{\infty} \frac{\cos yx \sin^2 \frac{1}{2}hx\,dx}{x^2+k^2} - \frac{1}{h}\int_0^{\infty} \frac{\sin xy\,(\sin hx - hx)}{x^2+k^2}\,dx$$

$$- \int_0^{\infty} \frac{x \sin yx\,dx}{x^2+k^2}.$$

Bezeichnen wir das erste Glied rechts mit $P(h)$, das zweite mit $Q(h)$, so findet man durch die Substitution $x : h$ für x

$$P(h) = -2\int_0^{\infty} \cos\frac{yx}{h} \frac{\sin^2\frac{1}{2}x\,dx}{x^2+h^2k^2}$$

$$= -2\int_0^{\omega} \cos\frac{yx}{h} \frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{x^2+h^2k^2}\,dx - 2\int_{\omega}^{\infty} \cos\frac{yx}{h} \frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{x^2+h^2k^2}\,dx.$$

Hierin können wir nun zuerst ω so groß machen, daß der zweite Teil beliebig klein wird, und dann, wenn y von Null verschieden ist, h so klein machen, daß nach 44) der erste Teil beliebig klein wird. Es wird demnach $P(h)$ mit abnehmenden h beliebig klein. Dieselbe Schlußweise lehrt, daß auch $Q(h)$ mit abnehmenden h beliebig klein wird. Es ist demnach

$$\frac{dF(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\int_0^\infty \frac{\cos yx\,dx}{x^2+k^2} = -\int_0^\infty \frac{x \sin yx\,dx}{x^2+k^2}.$$

Mit diesem Satze werden wir später den Wert von $F(y)$ finden.

Integrale über unendlich groß werdende Integranden.

70) Wird die Funktion $f(x)$ an der Stelle u zwischen a und b unendlich groß, so definiert man nach Dirichlet das über $f(x)$ von a bis b erstreckte Integral durch den Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,dx = lim \int_a^{u-\varepsilon} f(x)\,dx + lim \int_{u+\eta}^b f(x)\,dx,$$

worin ε und η unabhängig voneinander der Grenze Null zustreben. Sind mehrere Unendlichkeitsstellen zwischen a und b vorhanden, so ist das Integral in mehrere Teilintegrale zu zerlegen. Es fragt sich, wann hat das so definierte Integral einen Sinn.

Das Integral

$$\int_{-a}^b \frac{dx}{x} = lim \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + lim \int_\eta^b \frac{dx}{x} = lg\,\varepsilon - lg\,a + lg\,b - lg\,\eta = lg\,\frac{b}{a} + lg\,\frac{\varepsilon}{\eta}$$

nimmt bei passender Wahl des Verhältnisses $\varepsilon : \eta$ jeden beliebigen Wert an. Es ist nicht vorhanden.

Nimmt man $\varepsilon = \eta$ an, so erhält man den Cauchyschen Hauptwert.

Ist m eine ganze Zahl, so ist für $lim\ \varepsilon, \eta = 0$

$$\int_{-1}^1 x^{-m}\,dx = \frac{(-\varepsilon)^{-m+1}}{-m+1} - \frac{(-1)^{-m+1}}{-m+1} - \frac{\eta^{-m+1}}{-m+1} + \frac{1}{-m+1}.$$

Der Cauchysche Hauptwert existiert, wenn m eine ungerade Zahl ist, er existiert nicht, wenn m eine gerade Zahl ist. Im Dirichletschen Sinne ist das Integral in keinem der beiden Fälle vorhanden.

Spricht man von einem konvergenten Integral, so denkt man, wenn nicht eine besondere Bemerkung angefügt wird, immer nur an die Dirichletsche Definition.

71) Unbedingt konvergente Integrale. Ist $\varrho(x)$ eine Funktion, die monoton gegen Null konvergiert, wenn x der Zahl u zustrebt, während $\varrho'(x)$ monoton ins Unendliche wächst, und bleibt die Funktion

$$\varphi(x) = f(x) : \varrho'(x)$$

absolut genommen bis an die Stelle u unterhalb einer endlichen Grenze; so hat das Integral

$$\int_a^u f(x)\,dx$$

einen Sinn und heißt unbedingt konvergent. Denn es wird, wenn $\varepsilon' < \varepsilon$ ist, und M einen Mittelwert von $\varphi(x)$ bedeutet,

$$\int_{u-\varepsilon'}^{u-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_{u-\varepsilon'}^{u-\varepsilon} \varphi(x)\,\varrho'(x)\,dx = M\int_{u-\varepsilon'}^{u-\varepsilon} \varrho'(x)\,dx = M(\varrho(u-\varepsilon) - \varrho(u-\varepsilon'))$$

für hinreichend kleine ε beliebig klein.

Setzt man

$$J_\varepsilon = \int_a^{u-\varepsilon} f(x)\,dx$$

und bilden $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots$ eine gegen Null abnehmende Reihe, so konvergieren unter den gegebenen Voraussetzungen die Zahlen $J_{\varepsilon_1}, J_{\varepsilon_2}, \cdots, J_{\varepsilon_n}, \cdots$ nach bekannten Fundamentalsätzen der Arithmetik gegen eine feste Zahl J, die das Integral

$$\int_a^u f(x)\,dx$$

ist.

Ist $\varrho(x) = (x-u)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\varrho' = (x-u)^{\alpha-1}\alpha$, so sagt man, $f(x)$ werde an der Stelle u in einer Ordnung unendlich groß, die um ein Angebbares kleiner als die erste ist. Eine solche Funktion ist bis an die Unendlichkeitsstelle unbedingt integrabel.

Ebenso wenn

$$\varrho(x) = \left(lg_n \frac{1}{x-u}\right)^{-\alpha},$$

$$\varrho'(x) = \alpha : (x-u)\, lg \frac{1}{x-u}\, lg\, lg \frac{1}{x-u} \cdots lg_{n-1} \frac{1}{x-u} \left(lg_n \frac{1}{x-u}\right)^{1+\alpha}$$

ist. Es wird dann $f(x)$ an der Stelle u auch in einer niedereren als der ersten Ordnung unendlich groß, aber nicht in einer um ein Angebbares niederen.

Die Untersuchung ließe sich durch Substitution auf den Fall einer unendlichen Grenze zurückführen.

72) Konvergent, obschon nicht unbedingt konvergent, kann ein Integral sein, wenn die Funktion in der Nähe der Unendlichkeitsstelle unendlich viele Maxima und Minima hat. Das Integral ist dann besonders zu untersuchen. Das Integral ($b>0$)

$$\int_{\eta}^{b} \frac{e^{\frac{1}{x}} \sin\left(e^{\frac{1}{x}}\right) dx}{x} = -\int_{\eta}^{b} \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) dx + b \cos\left(e^{\frac{1}{b}}\right) - \eta \cos\left(e^{\frac{1}{\eta}}\right)$$

kann bis zur Grenze $\eta = 0$ erstreckt werden, obschon der Integrand an der Stelle Null unendlich groß in unendlich hoher Ordnung wird. — Daß die Maxima und Minima entgegengesetzte Zeichen haben ist nicht durchaus notwendig.

73) Das Integral

$$\int \frac{1}{x} \cos\frac{1}{x} \lg\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \sin\frac{1}{x} \lg\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 dx - \int \frac{2}{x} \cos\frac{1}{x} \cdot dx - x \sin\frac{1}{x} \lg\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2$$

ist zwischen 0 und 1 einer Integration fähig, obschon der Integrand unendlich oft, nämlich für jedes ganze m an der Stelle $x = 1 : m\pi$ unendlich groß wird.

74) Ein weiteres Integral, dessen Integrand unendlich oft unendlich wird. Weitere Beispiele von Integralen, deren Integrand auf dem Integrationswege unendlich oft unendlich wird, und die doch eine Integration zulassen, sind schon länger bekannt. Ein sehr einfaches

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\lg \cos^2 x}{x^2} dx = -\pi$$

ist von de la Vallée-Poussin gegeben. Wir beweisen dasselbe mittels einer Partialbruchdarstellung der Funktion $1 : \cos^2 x$. Sie lautet

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{\left(x + \frac{2m+1}{2}\pi\right)^2}.$$

Es ist

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\lg \cos^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lg \cos^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{\frac{2m-1}{2}\pi}^{\frac{2m+1}{2}\pi} \frac{\lg \cos^2 x}{x^2} dx,$$

und wenn man x durch $x+\frac{2m-1}{2}$ ersetzt

$$\int_0^\infty \frac{lg\cos^2 x}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^\pi \frac{lg\sin^2 x}{\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{lg\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{lg\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx.$$

Nun ist

$$d\,(tg\,x\,lg\sin^2 x - 2x) = 2 + \frac{lg\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2 = \frac{lg\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

und also

$$\int \frac{lg\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = tg\,x\,lg\sin^2 x - 2x$$

$$= tg\,x\,lg\frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} - 2x = -\,tg\,x\,lg\left(1+\frac{1}{tg^2 x}\right) - 2x,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{lg\sin^2 x}{\cos^2 x} = \int_0^\infty \frac{lg\cos^2 x}{x^2}\,dx = -\pi,$$

w. z. b. w.

Es könnte noch eine Rechtfertigung der Vertauschung des Integral- und Summenzeichens gefordert werden. Die hierzu dienenden Prinzipien werden gelegentlich der Fourierschen Reihen besprochen werden. Die Partialbruchreihe ist, wie man es nennt, gleichmäßig konvergent.

75) Erweiterung der Substitution. Durchläuft $x=\varphi(y)$ die Werte von a bis b, während y von α bis β läuft, so kann $\varphi'(y)$ unendlich groß werden. In diesem Falle ist die Substitution ohne weiteres zulässig. Es sei z. B. $x=\sqrt[3]{y}$, so hat man, wenn ε η zur Grenze Null übergehen,

$$\int_{-a}^{b} f(x)\,dx = lim\int_{-a}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + lim\int_{\eta}^{b} f(x)\,dx$$

$$= -\,lim\int_{-a^3}^{-\varepsilon^3} \frac{f(\sqrt[3]{y})}{3\sqrt[3]{y^2}}\,dy + lim\int_{\eta^3}^{b^3} \frac{f(\sqrt[3]{y})}{3\sqrt[3]{y^2}}\,dy = \int_{-a^3}^{b^3} \frac{f(\sqrt[3]{y})}{3\sqrt[3]{y^2}}\,dy.$$

Ist $\nu>1$, so ist in derselben Weise, so lange $\lambda+1>0$ ist,

$$\int_0^1 x^\lambda(1-x^\nu)^\mu\,dx = \frac{1}{\nu}\int_0^1 x^{\frac{\lambda+1}{\nu}-1}(1-x)^\mu\,dx.$$

Entspricht nach der Gleichung $x = \varphi(y)$ der Zahl $y = \beta - \eta$ die Zahl $x = b - \varepsilon$, so ist für ein noch so kleines η

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_\alpha^{\beta-\eta} f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy,$$

woraus ohne weiteres die Zulässigkeit der Substitutionen folgt.

76) Andere Fälle der Substitution. Liegt das Intervall $a \cdots b$ zwischen A und B und ist $f(x)$ zwischen AB integrabel, durchläuft $x = \varphi(y)$, wenn y von α bis γ läuft, das Intervall $a \cdots c$, wo c zwischen A und B liegt, durchläuft ferner x das Intervall von c bis c' in entgegengesetzter Richtung, wenn y von γ bis γ' läuft, und durchläuft endlich x das Intervall von c' bis b, wenn y von γ' bis β läuft, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{c'} f(x)\,dx + \int_{c'}^b f(x)\,dx$$

$$= \int_\alpha^\gamma f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy + \int_\gamma^{\gamma'} f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy + \int_{\gamma'}^\beta f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy.$$

Liegt c außerhalb $a \cdots b$, aber zwischen A und B, so kann nun c' auf b fallen, so daß x als Funktion von y nur *ein* Maximum oder Minimum hat. In allen diesen Fällen ist die Substitution zulässig.

Durchläuft x das Intervall von $a \cdots c$, wo c zwischen a und b liegt, während α bis γ läuft, wo γ außerhalb $\alpha \cdots \beta$ liegt und durchläuft x das Intervall $c \cdots b$, während y umkehrend von γ nach β läuft, wo β auch gleich α sein kann, so kann man schreiben

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy + \int_\gamma^\beta f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dx,$$

obschon $\varphi'(y)$ an der Stelle γ unendlich groß wird. Schreibt man hierfür, wenn $\gamma < \alpha$, $\beta \geqq \alpha$ ist,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy + \int_\gamma^\alpha f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy + \int_\alpha^\beta f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy,$$

so könnte es scheinen, als ob die beiden ersten Integrale rechts sich zu Null zusammenzögen. Da aber $x = \varphi(y)$ zwischen α und γ andere Werte durchläuft, als im zweiten Integral von γ bis α, so hat $\varphi(y)$ seine Bedeutung gewechselt, die Reduktion auf Null ist nicht zulässig und es ist

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

nicht gleich

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy.$$

Ein Beispiel dieser Art steht unter 53). Dort ist

$$(x-a)(x-b)=y,\quad x=\frac{a+b-\sqrt{(b-a)^2+4y}}{2},\quad c=\frac{1}{2}(a+b),$$

$$\gamma=-\frac{1}{4}(b-a)^2,\quad \alpha=0,\quad \beta=0.$$

Wächst x von c bis b, so ist dort das Vorzeichen der Wurzel umzukehren. Die Funktion $\varphi(y)$ ist mehrdeutig.

77) Differentiation nach einem Parameter bei unendlich groß werdenden Integranden. Wird $f(x,y)$ an der Stelle c zwischen a und b unendlich groß und ist $f(xy)$ über die Stelle c hinweg integrabel, so schreibe man

$$\int_a^b f(x,y)\,dx=\lim_{\varepsilon=0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x,y)\,dx+\lim_{\eta=0}\int_{c+\eta}^b f(x,y)\,dx.$$

Genügt nun $f(x,y)$ bis in jede beliebige Nähe der Stelle c den Bedingungen der Zulässigkeit der Differentiation unter dem Integralzeichen, so ist

$$\frac{d}{dy}\left\{\int_a^{c-\varepsilon} f(x,y)\,dx+\int_{c+\eta}^b f(x,y)\,dx\right\}=\int_a^{c-\varepsilon} f_2(x,y)\,dx+\int_{c+\eta}^b f_2(x,y)\,dx,$$

wo $f_2(x,y)=\partial f(x,y):\partial y$ ist. Im allgemeinen wird nun $f_2(x,y)$ an der Stelle c ebenfalls unendlich groß. Ist aber $f_2(x,y)$ ebenfalls über die Stelle c hinweg integrabel, so kann man mit ε, η zur Grenze Null übergehen, und es ergibt sich

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Es kann aber auch $f_2(x,y)$ an einer Stelle unendlich groß werden, ohne daß dort $f(x,y)$ unendlich groß wird, wie z. B. an der Stelle $x=y$, wenn

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x-y}$$

ist ($\int_a^b \sqrt[3]{x-y}\cdot dx$ läßt offenbar Differentiation unter dem Integralzeichen zu), es kann die Unendlichkeitsstelle c von y abhängen. Solche Fälle mögen der Spezialuntersuchung überlassen bleiben.

Die Fouriersche Reihe.

Die trigonometrischen oder Fourierschen Reihen, die nach *sinus* und *cosinus* vielfacher Bögen fortschreiten und in der mathematischen Physik eine hervorragende Rolle spielen, geben reichliche Gelegenheit zur Auswertung bestimmter Integrale. Sie haben Anlaß gegeben, die Theorie der bestimmten Integrale auf die Höhe zu heben, auf der sie jetzt steht. Dirichlet hat zuerst eine strenge Methode zur Behandlung dieser Reihen gegeben, und Riemann, dem wir die weiteste Ausbildung des Integralbegriffes verdanken, hat Dirichlets Untersuchungen zur schönsten Vollendung gebracht. Natürlich haben auch noch später andere hervorragende Mathematiker sich um die Untersuchung von Einzelheiten verdient gemacht. Einen ausgedehnten Literaturnachweis findet man in „A. Sachse: Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Funktionen durch trigonometrische Reihen, Göttingen 1879, Dissertation".

78) Die älteste und zugleich heuristische Methode, zu den Fourierschen Reihen zu gelangen, ist die von Lagrange. Obwohl dieselbe nicht streng ist, auch in gewissen Fällen, nämlich bei unstetigen Funktionen, zu unrichtigen Resultaten führt, und sich wohl nur unter der Voraussetzung der Periodizität, Stetigkeit und Differenzierbarkeit der zu entwickelnden Funktionen zu einer strengen machen läßt, so führt sie doch so sehr in das Wesen der Koeffizientenbestimmung ein, daß sie als Einleitung in die Theorie der trigonometrischen Reihen nicht fehlen darf. Zuerst aber machen wir einen Versuch einer Funktionsdarstellung, der nicht zum Ziele führt.

Hat eine Funktion $f(x)$ für $x = x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ die Werte bzw. $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$, so kann man eine *ganze* Funktion konstruieren, welche an diesen Stellen dieselben Werte hat, und zwar gibt die Lagrangesche Interpolationsformel für diese ganze Funktion den Ausdruck

$$\frac{y_1 \Delta_1(x)}{\Delta_1(x_1)} + \frac{y_2 \Delta_2(x)}{\Delta_2(x_2)} + \cdots + \frac{y_n \Delta_n(x)}{\Delta_n(x_n)},$$

$$\Delta(x) = x - x_1 \cdot x - x_2 \cdots x - x_n, \quad \Delta_\mu(x) = \Delta(x) : (x - x_\mu).$$

Kann man nun wohl dadurch, daß man die $x_1 x_2 \cdots x_n$ immer enger und enger aneinanderschließt zu einer immer genaueren Darstellung der Funktion $f(x)$ gelangen, läßt dieser Ausdruck einen Grenzenübergang $n = \infty$ zu? Selbst die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ vorausgesetzt, muß diese Frage im allgemeinen entschieden verneint werden. Ist nämlich die gegebene Funktion in einem Gebiete, etwa zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, eine analytische Funktion, z. B. $\sin x$, von da aber eine andere, etwa $\cos x$, so

lehrt die elementare Funktionentheorie, daß eine Potenzreihe, und in eine solche würde die Lagrangesche Formel nach Umordnung durch Grenzübergang übergehen, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ die Funktion $\sin x$ darstellt, dieselbe Funktion auch für alle weiteren Werte von x darstellt, für welche die Reihe konvergiert. Wollte man in der Lagrangeschen Formel n größer und größer nehmen, so würde es im allgemeinen an Formeln fehlen, die Koeffizienten der einzelnen Potenzen in einfacher Weise darzustellen, auch würde die Reihe im allgemeinen nicht konvergieren.

79) Der Mangel einfacher Formeln für die Darstellung der Koeffizienten einer Interpolationsformel fällt fort, wenn man statt einer ganzen Funktion eine Summe von *sinus* zugrunde legt, deren Bögen Vielfache einer Veränderlichen sind, wenigstens wenn man die $x_1, x_2, x_3, \cdots$ äquidistant annimmt. Ist das Intervall, in dem eine Funktion gegeben ist und durch Interpolation dargestellt werden soll, $a \cdots b$, so läßt sich durch Einführung einer neuen Veränderlichen dieses Intervall $a \cdots b$ auf das von 0 bis π reduzieren, weshalb wir von vornherein annehmen, daß eine Funktion in diesem Intervalle darzustellen sei. Es werde also

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_{n-1} \sin (n-1)x$$

gesetzt. Wir fordern, daß die Koeffizienten $a_1, a_2 \cdots, a_{n-1}$ so bestimmt werden sollen, daß $f(x)$ mit der Sinussumme für

$$x = \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \cdots, \frac{(n-1)\pi}{n}$$

übereinstimmen solle. Die Sinussumme hat für $x = 0$ den Wert 0, und wird daher $f(0)$ gewiß *nicht* darstellen, wenn dieser Wert von 0 verschieden ist. Auch stellt die Summe eine ungerade, nach 2π periodische Funktion dar, während über $f(x)$ außerhalb des Intervalles $0 \cdots \pi$ nichts vorausgesetzt ist.

80) Einige Hilfssätze der Trigonometrie. Bekanntlich ist

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta),$$
$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta),$$
$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta),$$
$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta),$$
$$\cos u - \cos v = 2 \sin \tfrac{1}{2}(u+v) \sin \tfrac{1}{2}(v-u),$$
$$\cos u + \cos v = 2 \cos \tfrac{1}{2}(u+v) \cos \tfrac{1}{2}(u-v),$$
$$\sin u + \sin v = 2 \sin \tfrac{1}{2}(u+v) \cos \tfrac{1}{2}(u-v),$$
$$\sin u - \sin v = 2 \sin \tfrac{1}{2}(u-v) \cos \tfrac{1}{2}(u+v).$$

Multipliziert man die Reihe

$$S_n(\vartheta) = \cos\vartheta + \cos 2\vartheta + \cdots + \cos(n-1)\vartheta$$

mit $2\sin\frac{1}{2}\vartheta$, und ersetzt $2\sin\frac{1}{2}\vartheta\cos\mu\vartheta$ durch

$$\sin\tfrac{1}{2}(2\mu+1)\vartheta - \sin\tfrac{1}{2}(2\mu-1)\vartheta,$$

so erhält man

$$2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\, S_n(\vartheta) = \sin\tfrac{1}{2}(2n-1)\vartheta - \sin\tfrac{1}{2}\vartheta.$$

Ist nun ϑ nicht Null oder ein Multiplum von 2π, so folgt

$$\cos\vartheta + \cos 2\vartheta + \cdots + \cos(n-1)\vartheta = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n-1}{2}\vartheta}{2\sin\frac{1}{2}\vartheta}.$$

Diese Formel ergibt, wenn h ganz, aber nicht Null oder ein Multiplum von $2n$ ist,

$$\cos\frac{h\pi}{n} + \cos\frac{2h\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{(n-1)h\pi}{n} = -\frac{1}{2}(1+\cos h\pi).$$

Ist $h = 0$ oder ein Multiplum von $2n$, so hat die Summe den Wert $n-1$. Aus unserer Summationsformel folgt noch, wenn ϑ nicht Null oder ein Multiplum von π ist,

$$\frac{1}{2}S_{2n}(\vartheta) - \frac{1}{2}S_{2n}(\vartheta+\pi) = \cos\vartheta + \cos 3\vartheta + \cdots + \cos(2n-1)\vartheta$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(4n-1)\vartheta}{4\sin\frac{1}{2}\vartheta} + \frac{\cos\frac{1}{2}(4n-1)\vartheta}{4\cos\frac{1}{2}\vartheta} = \frac{\sin 2n\vartheta}{2\sin\vartheta}.$$

Setzt man hierin $\vartheta = h\pi : 2n$, so folgt, wenn h nicht 0 oder ein Multiplum von $2n\pi$ ist,

$$\cos\frac{h\pi}{2n} + \cos\frac{3h\pi}{2n} + \cdots + \cos\frac{(2n-1)h\pi}{2n} = 0.$$

Wenn h ein Multiplum von $2n$ ist, so ist die Summe $\pm n$, je nachdem h ein gerades oder ein ungerades Multiplum von $2n$ ist.

81) Die Koeffizientenbestimmung. Es bestehen die $n-1$ Gleichungen

$$f\left(\frac{\pi}{n}\right) = a_1\sin\frac{\pi}{n} + a_2\sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + a_{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$

. . . . . .

$$f\left(\frac{\nu\pi}{n}\right) = a_1\sin\frac{\nu\pi}{n} + a_2\sin\frac{2\nu\pi}{n} + \cdots + a_{n-1}\sin\frac{\nu(n-1)\pi}{n},$$

. . . . . .

$$f\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = a_1\sin\frac{(n-1)\pi}{n} + \cdots + a_{n-1}\sin\frac{(n-1)^2\pi}{n}.$$

Multipliziert man die ν^{te} Gleichung dieses Systems mit

$$2 \sin \frac{\nu \lambda \pi}{n}, \quad \text{für } \nu = 1, 2, 3, \cdots, n-1,$$

und addiert dann, so folgt

$$2 \sum_{(\nu)} f\left(\frac{\nu \pi}{n}\right) \sin \frac{\nu \lambda \pi}{n} = \sum_{(\mu)} a_\mu A_{\mu \lambda},$$

$$A_{\mu \lambda} = 2 \sum_{(\nu)} \sin \frac{\nu \mu \pi}{n} \sin \frac{\nu \lambda \pi}{n} = \sum_{(\nu)} \left(\cos \frac{(\lambda - \mu) \nu \pi}{n} - \cos \frac{(\lambda + \mu) \nu \pi}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{2} [\cos (\lambda + \mu) \pi - \cos (\lambda - \mu) \pi], \quad \lambda \gtrless \mu.$$

Es ist also $A_{\mu \lambda} = 0$, wenn λ von μ verschieden ist, und

$$A_{\mu \mu} = n - 1 + \frac{1}{2} (1 + \cos 2 \mu \pi) = n.$$

Und so ergibt sich

$$2 \sum_{(\nu)} f\left(\frac{\nu \mu}{n}\right) \sin \frac{\nu \pi \mu}{n} = n a_\mu, \quad a_\mu = \frac{2}{n} \sum_{(\nu)} f\left(\frac{\nu \pi}{n}\right) \sin \frac{\nu \mu \pi}{n},$$

und es ist a_μ durch die gegebenen Werte der Funktion f vollständig ausgedrückt, und zwar in einer Weise, die, wenigstens formal, einen leichten Grenzübergang gestattet. Denn für wachsende n liefert der Begriff des bestimmten Integrales als Grenzwert einer Summe den Wert

$$a_\mu = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi) \sin \mu \xi \, d\xi.$$

Daraus folgt aber nicht die Entwickelbarkeit von $f(x)$, und selbst wenn die Konvergenz erweisbar ist, so folgt auch dann noch nicht die Gleichheit. Die Schwierigkeit liegt darin, daß der Grenzübergang ein gleichzeitig doppelter ist. Einmal wächst die Anzahl der Summenglieder, und zweitens nähern sich die Koeffizienten einem Grenzwerte, dem Integral. Eine genauere Untersuchung des Grenzüberganges müßte für jedes n den Unterschied schätzen lehren zwischen der Summe und dem Grenzwerte. Gleichwohl schreiten wir dazu, einige Beispiele auszuführen, von denen sich einige in bezug auf ihre Richtigkeit auf andere Weise kontrollieren lassen.

Ist $f(x)$ eine endliche integrable Funktion, so folgt aus 44), daß die a_μ mit wachsenden μ beliebig klein werden. Das genügt aber nicht zu einem Schluß auf die Konvergenz der Reihe. Wenn wir gleichwohl dazu schreiten, Beispiele dieser Entwicklung zu geben, von denen sich einige a posteriori auch ohne Dirichlets Satz verifizieren, so behalten wir uns den strengen Nachweis der Gültigkeit vor, und nehmen zugleich noch

die Tatsache voraus, daß die Fouriersche Reihe, wenn sie eine unstetige Funktion darstellt, an den Sprungstellen den Mittelwert zwischen den der Stelle unmittelbar voraufgehenden und nachfolgenden Werten der Funktion, den Wert $\frac{1}{2}f(x-0)+\frac{1}{2}f(x+0)$ liefert.

82) Es soll die Funktion $f(x)=1$ im Intervalle $0\cdots\pi$ durch eine Sinusreihe dargestellt werden. Dann ist

$$a_\mu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\mu\xi\,d\xi=-\frac{2}{\pi}\frac{\cos\mu\pi}{\mu}+\frac{2}{\pi\mu},\quad a_{2m}=0,\quad a_{2m+1}=\frac{4}{(2m+1)\pi},$$

und es ergibt sich

$$f(x)=1=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\cdots\right),$$

welche Reihe für $x=0,\ \pi$ offenbar die Eins nicht darstellt, sondern den Wert Null liefert. Stimmt sie sonst zwischen 0 und π mit der linken Seite überein, so ergibt sie für negatives x zwischen 0 und $-\pi$ den Wert -1. Für $x=0$ hat sie den Wert $0=\frac{1}{2}f(-0)+\frac{1}{2}f(0)$. An der Stelle π den Wert $\frac{1}{2}f(-\pi+0)+\frac{1}{2}f(\pi-0)=0$. Für $x=\frac{1}{2}\pi$ fließt aus ihr

$$\frac{1}{4}\pi=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-+\cdots.$$

Die elementare Funktionentheorie hat Mittel, diese Reihe zu verifizieren. Denn die Reihe

$$lg(1+t)-lg(1-t)=2\left(t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+\cdots\right)$$

konvergiert, abgesehen von den Werten $t=\pm 1$, noch auf dem Konvergenzkreise, und stellt dort nach einem bekannten Satze von Abel und Dirichlet die linke Seite dar. Man erhält für $t=\cos x+i\sin x$, wenn x positiv ist,

$$lg\,ctg\frac{1}{2}x+i\frac{\pi}{2}=2\sum_{(\mu)}\frac{\cos(2\mu+1)x+i\sin(2\mu+1)x}{2\mu+1}.$$

Für negative x erhält man als Wert der Reihe

$$lg\,ctg\left(-\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{2}i\pi.$$

Durch Vergleichung des Imaginären mit dem Imaginären, des Reellen mit dem Reellen erhält man einmal die Darstellung der Zahl 1 bzw. -1 durch die oben gefundene Sinusreihe, ein andermal eine Kosinusreihe

$$\frac{1}{4}lg\,ctg^2\frac{1}{2}x=\cos x+\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}+\cdots.$$

83) Nun wollen wir die Funktion $t_n(x)$ darstellen, die zwischen 0 und $\pi : 2n$ Null ist, zwischen $\pi : 2n$ und $3\pi : 2n$ Eins, zwischen $3\pi : 2n$ und $5\pi : 2n$ Zwei usw., zwischen $(2n-1)\pi : 2n$ und π gleich n ist. An den Sprungstellen mag sie gleich dem Mittelwert zwischen den unmittelbar voraufgehenden und unmittelbar nachfolgenden Werten sein, also bei $\pi : 2n$ gleich $\frac{1}{2}$. Dann ist

$$a_\mu = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi:2n} 0 \cdot \sin \mu\xi \, d\xi + \int_{\pi:2n}^{3\pi:2n} \sin \mu\xi \, d\xi + \cdots + n\int_{(2n-1)\pi:2n}^{\pi} \sin \mu\xi \, d\xi\right\},$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mu\pi a_\mu = &-\cos\frac{3\mu\pi}{2n} + \cos\frac{\mu\pi}{2n} - 2\cos\frac{5\mu\pi}{2n} + 2\cos\frac{3\mu\pi}{2n}\\ &- 3\cos\frac{7\mu\pi}{2n} + 3\cos\frac{5\mu\pi}{2n} - + \cdots - n\cos\mu\pi + n\cos\frac{\overline{2n-1}\,\mu\pi}{n}\\ &- \cos\frac{\mu\pi}{2n} + \cos\frac{3\mu\pi}{2n} + \cdots + \cos\frac{\overline{2n-1}\,\mu\pi}{2n} + (-1)^{\mu+1}n.\end{aligned}$$

Ist μ kein Multiplum von $2n$, so ist dies nach 80) gleich $(-1)^{\mu+1}n$. Ist $\mu = 2mn$, so ist der Ausdruck gleich $-n + (-1)^m n$, gleich 0 für gerade m, gleich $-2n$ für ungerade m. Daraus folgt

$$t_n(x) = \frac{2n}{\pi}\sum_\mu \frac{(-1)^{\mu+1}\sin\mu x}{\mu} + \frac{1}{\pi}\sum_\mu \frac{(-1)^\mu \sin 2\mu n x}{\mu}$$

Insbesondere ist für $n = 1$

$$t_1(x) = \frac{2}{\pi}\left(\sin x - \sin 2x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots\right).$$

Diese Funktion ist Null, wenn x zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt, Eins, wenn x zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π liegt. Für $x = \frac{1}{2}\pi$ erhält man

$$t_1\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \cdots\right) = \frac{1}{2}.$$

84) Soll die Funktion x zwischen 0 und π in eine Sinusreihe entwickelt werden, so ist

$$a_\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \xi \sin\mu\xi \, d\xi = \frac{-2\cos\mu\pi}{\mu} = \frac{2(-1)^{\mu+1}}{\mu},$$

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \cdot + \cdots\right).$$

Diese Reihe für x konvergiert nach dem bekannten Satze, daß eine Sinusreihe konvergent ist, wenn ihre Koeffizienten fortwährend abnehmend gegen Null konvergieren, und die Zeichen entweder dieselben sind oder wechseln. Die Konvergenz ist jedoch keine absolute, auch erkennt man

sofort, daß nicht überall die Reihe den Wert x gibt, weil sie für $x = \pi$ Null liefert. Stellt man sich die Kurve $y = S(x)$ graphisch dar, so erkennt man, daß, wenn die Reihe sonst zwischen 0 und π wirklich x darstellt, sie für $x = \pi$ den Mittelwert zwischen den unmittelbar der Stelle π voraufgehenden und der Stelle $-\pi$ nachfolgenden Werten liefert. Wir sind hier wieder in der Lage, die Darstellung auf anderem elementarem Wege als richtig zu erweisen. Es ist

$$lg(1+t) = \frac{1}{2} lg(1 + r^2 + 2r\cos x) + lg \frac{1 + r\cos x + ir\sin x}{\sqrt{1 + 2r\cos x + r^2}}$$

$$= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdot - \cdots$$

$$= r\cos x - \frac{1}{2} r^2 \cos 2x + \frac{1}{3} r^3 \cos 3x - \cdot + \cdots$$

$$+ i\left(r\sin x - \frac{1}{2} r^2 \sin 2x + \frac{1}{3} r^3 \sin 3x - \cdot + \cdot \cdot\right),$$

wenn $t = r\cos x + ir\sin x$ gesetzt wird. Daraus folgt nach dem Abel-Dirichletschen Satze, wenn man nur die imaginären Teile vergleicht, und wenn man r der Grenze 1 zustreben läßt und die Werte $x = \pm\pi$ ausnimmt, für welche der Grenzübergang unter dem Logarithmus keinen Sinn hat,

$$\frac{1}{i} lg \frac{1 + \cos x + i\sin x}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos x}} = \frac{1}{i} lg\left(\cos\frac{1}{2}x + i\sin\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x$$

$$= \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdot - \cdots,$$

also unser obiges Resultat.

85) Nun werde die unter 33) nach Riemann definierte Funktion

$$r\left(\frac{nx}{\pi}\right) = \frac{nx}{\pi} - t_n(x),$$

die graphisch durch einen sägeförmigen Zug dargestellt wird, in eine Sinusreihe entwickelt. Aus 83) ergibt sich

$$r\left(\frac{nx}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu} (-1)^{\mu+1} \frac{\sin 2\mu n x}{\mu},$$

und es ist

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} r\left(\frac{n\xi}{\pi}\right) \sin \mu\xi \, d\xi = 0,$$

wenn μ nicht ein Multiplum von $2n$, insbesondere wenn μ ungerade ist. Es ist aber

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} r\left(\frac{n\xi}{\pi}\right) \sin 2mn\xi \, d\xi = \frac{(-1)^{m+1}}{m\pi}.$$

Die unter 33) definierte unendlich oft unstetige Funktion

$$S\left(\frac{x}{\pi}\right) = r\left(\frac{x}{\pi}\right) + \frac{1}{2^2} r\left(\frac{2x}{\pi}\right) + \frac{1}{3^2} r\left(\frac{3x}{\pi}\right) + \cdots + \frac{1}{n^2} r\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \cdots,$$

die durch eine absolut konvergente Reihe gegeben ist, die gliedweise Integration zuläßt, wird durch eine Fouriersche Reihe von der Form dargestellt

$$S\left(\frac{x}{\pi}\right) = \sum_{\mu} b_\mu \sin 2\mu x, \quad b_\mu = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi S\left(\frac{\xi}{\pi}\right) \sin 2\mu\xi \, d\xi.$$

Zum Koeffizienten b_μ liefern nur solche Glieder $\frac{1}{n^2} r\left(\frac{nx}{\pi}\right)$ der Reihe $S\left(\frac{x}{\pi}\right)$ einen Beitrag, in denen n ein Teiler von μ ist. Setzen wir $\mu = \tau \cdot \tau'$, so liefert das Glied $\frac{1}{\tau^2} r\left(\frac{\tau x}{\pi}\right)$ zu b_μ den Beitrag

$$\frac{(-1)^{\tau'+1}}{\tau' \tau^2 \pi} = \frac{(-1)^{\tau'+1}}{\mu \tau \pi},$$

und wir erhalten den Koeffizienten b_μ, wenn wir die Summe der Beiträge der Glieder bilden, deren n ein Teiler von μ ist, wir erhalten also den Wert

$$\frac{1}{\pi} \sum_{\tau'} \frac{(-1)^{\tau'+1}}{\mu\tau} = \frac{1}{\pi} \sum_{\tau} \frac{(-1)^{\tau+1}\tau}{\mu^2},$$

worin die Summe über alle Teiler τ' oder τ von μ zu erstrecken ist. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$S\left(\frac{x}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu} \frac{\sum_{\tau} (-1)^{\tau+1}\tau}{\mu^2} \sin 2\mu x,$$

oder

$$S(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu} \frac{\sum_{\tau} (-1)^{\tau+1}\tau}{\mu^2} \sin 2\mu x\pi.$$

86) Eine gleichmäßig konvergente Reihe darf gliedweise integriert werden. Sind $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_n(x)$, $\cdots$ im Intervalle $a \cdots b$ endliche integrable Funktionen, und ist die Reihe

$$S(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x) + \cdots$$

gleichmäßig konvergent, d. h., läßt sich eine Zahl N angeben, so daß durchgehend im Intervall $a \cdots b$

$$abs\,(\varphi_{N+1}(x) + \varphi_{N+2}(x) + \cdots) < \sigma$$

wird, bei beliebig klein vorgegebenem σ, so ist

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \varphi_1(x)\,dx + \int_a^b \varphi_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b \varphi_n(x)\,dx + \cdots.$$

Denn es ist, wenn

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n(x) = S_n(x)$$

gesetzt wird

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b S_N(x)\,dx + \xi\sigma(b-a)$$

$$= \int_a^b \varphi_1(x)\,dx + \int_a^b \varphi_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b \varphi_N(x)\,dx + \xi\sigma\,(b-a),$$

wo ξ ein echter positiver oder negativer Bruch ist. Es unterscheidet sich also

$$\int_a^b S(x)\,dx$$

von der Summe der ersten N Glieder der Reihe

$$\sum_\mu \int_a^b \varphi_\mu(x)\,dx$$

beliebig wenig, wenn N groß genug genommen wird, woraus zugleich folgt, daß die Summe der Integrale konvergiert, wenn $S(x)$ eine integrable Funktion ist.

Absolut konvergente Fouriersche Reihen sind gleichmäßig konvergente Reihen.

87) Beispiel der Unzulässigkeit gliedweiser Integration. Ist eine Reihe zwar konvergent, aber nicht gleichmäßig konvergent, so kann das Integral der Summe von der Summe der Integrale verschieden sein. Es genügt, dies an einem Beispiele darzulegen. Die Reihe

$$S(x) = \sum_{m=1}^{m=\omega} \left(\frac{2xm}{1+m^2x^4} - \frac{2(m+1)x}{1+(m+1)^2x^4} \right)$$

konvergiert für $x = 0$ und jedes positive x gegen den Wert $2x:(1+x^4)$, weil sich die Summe der ersten $n-1$ Glieder von $2x:(1+x^4)$ um $2xn:(1+n^2x^4)$ unterscheidet. Der letzte Ausdruck konvergiert für jedes positive x mit wachsenden n gegen Null. Es muß aber, damit dieser Ausdruck kleiner als σ werde, n größer und größer genommen werden, wenn x kleiner und kleiner wird. Ist z. B. $\sigma = 1:N$, wo N eine große ganze Zahl ist, so wird $2xN:(1+N^2x^4)$ für $x = 1:N$ nahe Zwei, und es muß also n

größer als N genommen werden, wenn der Rest kleiner als $1:N$ sein soll. Die Reihe ist nicht gleichmäßig konvergent. Das Integral der Summe der ersten $n-1$ Glieder von 0 bis x erstreckt, ist

$$arctg\, x^2 - arctg\, n^2x^2$$

und der Grenzwert für $n = \infty$ gibt $arctg\, x^2 - \frac{1}{2}\pi$; während das Integral der Summe $arctg\, x^2$ ist.

88) Es sei $f(x)$ gleich x zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, gleich $\pi - x$ zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π, wie stellt sich diese Funktion durch eine Sinusreihe dar?

Es ist

$$\int_0^{\pi} f(\xi)\, sin\, \mu\xi\, d\xi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \xi\, sin\, \mu\xi\, d\xi + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} (\pi - \xi)\, sin\, \mu\xi\, d\xi$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \xi\, sin\, \mu\xi\, d\xi + (-1)^{\mu+1} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \xi\, sin\, \mu\xi\, d\xi,$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi)\, sin\, \mu\xi\, d\xi = \frac{4\, sin\frac{1}{2}\mu\pi}{\mu^2\pi} = a_\mu,$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{sin\, x}{1^2} - \frac{sin\, 3x}{3^2} + \frac{sin\, 5x}{5^2} - \frac{sin\, 7x}{7^2} + \cdot - \cdots\right).$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right), \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{0(n)}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(Man stelle die aus Geradenstücken bestehenden Wellen graphisch dar.)

Setzt man

$$X = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{8}\pi^2 + \frac{1}{4}X,$$

so folgt

$$X = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{1}{6}\pi^2,$$

und in ähnlicher Weise

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{1}{12}\pi^2.$$

89) Ist $f(x) = x(\pi - x)$ zwischen 0 und π, so ist

$$a_\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \xi(\pi-\xi)\sin\mu\xi\, d\xi = \frac{4}{\pi\mu^3}(1-\cos\mu\pi)$$

$$a_{2\mu} = 0, \quad a_{2\mu+1} = \frac{8}{\pi(2\mu+1)^3}$$

$$x(\pi-x) = \frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{27} + \frac{\sin 5x}{125} + \frac{\sin 7x}{343} + \cdots\right)$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \cdots\right).$$

Die graphische Darstellung gibt parabolische Wellen.

90) In den beiden Beispielen unter 88) und 89) sind wir zu *absolut* konvergenten Reihen gelangt. Eine solche Reihe stellt eine *stetige* Funktion dar. Es sei

$S_n(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$, $S(x) = \lim S_n(x)$, $n = \infty$.

$\sum abs\, a_\mu = s$ sei konvergent. So ist

$$S(x+h) - S(x) = \sum a_\mu (\sin\mu(x+h) - \sin\mu x)$$
$$= 2\sum a_\mu \sin\tfrac{1}{2}\mu h \cos\mu\left(x + \tfrac{1}{2}h\right).$$

Diese Reihe ist wieder absolut konvergent. Ist

$$S(x) - S_n(x) = R_n(x),$$

so können wir, weil die Reihe absolut konvergent ist n so groß annehmen, daß für *jedes* x und h $R_n(x+h) - R_n(x) < \frac{1}{2}\delta$ wird. Nimmt man dann $h < \delta : 4ns$ an, so ist auch

$$S_n(x+h) - S_n(x) < \tfrac{1}{2}\delta$$

und also

$$S(x+h) - S(x) = S_n(x+h) - S_n(x) + R_n(x+h) - R_n(x) < \delta$$

wie klein auch δ vorgegeben sein mag. Also ist $S(x)$ eine stetige Funktion w. z. b. w. Dasselbe gilt, wenn man *cos* statt der *sin* setzt.

91) Es sei $f(x) = \cos\sigma x$, so ist zwischen 0 und π

$$\cos\sigma x = \sum_\mu \frac{2\mu[1-(-1)^\mu\cos\sigma\pi]}{(\mu^2-\sigma^2)\pi}\sin\mu x.$$

Setzt man $x = \frac{1}{2}\pi$ so folgt

$$\cos\frac{1}{2}\sigma\pi = \frac{2(1+\cos\sigma\pi)}{\pi}\sum_{\mu}{}'\frac{(-1)^{\mu}(2\mu+1)}{(2\mu+1)^2-\sigma^2},$$

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\sigma\pi} = 2\sum_{\mu}{}'\frac{(-1)^{\mu}(2\mu+1)}{(2\mu+1)^2-\sigma^2} = \sum_{\mu}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{2\mu+1-\sigma}+\frac{1}{2\mu+1+\sigma}\right),$$

womit eine Partialbruchdarstellung einer trigonometrischen Funktion gefunden ist, deren Untersuchung hier nicht weiter verfolgt werden soll.

92) Zulässigkeit gliedweiser Differentiation der Sinusreihe. Unter gewissen Voraussetzungen über die Konvergenz der formalen Ableitung der Sinusreihe $\sum a_{\mu}\sin\mu x = S(x)$ an der Differentiationsstelle, also der Reihe

$$s(x) = \sum \mu a_{\mu}\cos\mu x,$$

glückt es, nachzuweisen, daß $s(x)$ der Mittelwert zwischen dem vorwärts genommenen und rückwärts genommenen Differentialquotienten, also gleich $\frac{1}{2}S'(x)^{+}+\frac{1}{2}S'(x)^{-}$ ist. Da $s(x)$ konvergieren soll, so müssen die Größen

$$s_{n-1}(x) = n a_n \cos nx + (n+1)a_{n+1}\cos(n+1)x + \cdots$$

mit wachsenden n gegen Null konvergieren. Es sei $\varrho(\mu)$ eine mit wachsenden μ derart über alle Grenzen wachsende Funktion, daß $\sum 1:\mu\,\varrho(\mu)$ eine absolut konvergente Reihe ist. Die zu machende Voraussetzung ist die, daß die Größe $s'_{\mu} = s_{\mu}\,\varrho(\mu)$ mit wachsenden μ über eine bestimmte Grenze G absolut genommen, nicht hinausgeht. Dann gilt der ausgesprochene Satz.

Die Zahl m werde so groß angenommen, daß die Größen $s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, \cdots$ sämtlich absolut genommen kleiner als eine kleine vorgegebene Zahl σ werden. Es ist

$$\frac{S(x+h)-S(x-h)}{2h} = \sum\frac{\mu a_{\mu}\cos\mu x\sin h\mu}{h\mu}$$

$$= (s_0-s_1)\frac{\sin h}{h}+(s_1-s_2)\frac{\sin 2h}{2h}+(s_2-s_3)\frac{\sin 3h}{3h}+\cdots$$

$$= s_0\frac{\sin h}{h}+s_1\left(\frac{\sin 2h}{2h}-\frac{\sin h}{h}\right)+s_2\left(\frac{\sin 3h}{3h}-\frac{\sin 2h}{2h}\right)+\cdots$$

$$= s_0\frac{\sin h}{h}+s_1\left(\frac{\sin 2h}{2h}-\frac{\sin h}{h}\right)+\cdots+s_m\left(\frac{\sin(m+1)h}{(m+1)h}-\frac{\sin mh}{mh}\right)+R_m$$

$$R_m = \sum_{\mu=m+1}^{\mu=\infty} s_{\mu}\left(\frac{\sin(\mu+1)h}{(\mu+1)h}-\frac{\sin\mu h}{\mu h}\right).$$

$$\frac{S(x+h)-S(x-h)}{2h} = s_0+\varepsilon_m+R_m,$$

worin ε_m mit abnehmenden h beliebig klein wird.

Die Reihe R_m zerlegen wir in zwei Teile, von denen der erste die ersten q Glieder von R_m enthält,

$$R'_m = \sum_{\mu=m+1}^{\mu=m+q} s_\mu \left(\frac{\sin(\mu+1)h}{(\mu+1)h} - \frac{\sin \mu h}{\mu h} \right),$$

wo q das größte in $\pi : h$ enthaltene Ganze ist. R''_m enthält die übrigen Glieder von R_m. Die Funktion $\sin x : x$ nimmt in den beiden ersten Quadranten, wo ihre Ableitung negativ ist, monoton ab. Folglich haben in R'_m die Koeffizienten der s_μ alle einerlei Vorzeichen, und man hat, wenn man $m + q = q'$ setzt, nach 18):

$$R'_m = \mathfrak{M}(s_\mu) \sum_{\mu=m+1}^{\mu=q'} \left(\frac{\sin(\mu+1)h}{(\mu+1)h} - \frac{\sin \mu h}{\mu h} \right) = \mathfrak{M}(s_\mu) \left(\frac{\sin(q'+1)h}{(q'+1)h} - \frac{\sin(m+1)h}{(m+1)h} \right).$$

Die Klammer ist absolut genommen kleiner als Zwei, und da der Mittelwert $\mathfrak{M}(s_\mu)$ der Größen $s_{m+1}, s_{m+2}, \cdots, s_{m+q}$ kleiner als σ ist, und σ beliebig klein angenommen werden kann, so können wir sagen, R'_m kann dadurch beliebig klein gemacht werden, daß man m groß genug annimmt.

Es erübrigt noch R''_m zu betrachten. Es ist

$$R''_m = \sum_{\mu=q'+1}^{\mu=\infty} s_\mu \left(\frac{\sin(\mu+1)h}{(\mu+1)h} - \frac{\sin \mu h}{\mu h} \right)$$
$$= -\sum s_\mu \sin(\mu+1)h \left(\frac{1}{(\mu+1)h} - \frac{1}{\mu h} \right) + \sum s_\mu \left(\frac{\sin(\mu+1)h - \sin \mu h}{\mu h} \right).$$

In der ersten Summe sind die Klammern $= -1 : (\mu+1)\mu h$ von einerlei Zeichen, und da qh nahe π ist, so wird die Summe mit abnehmenden h und wachsenden q nach 18) beliebig klein.

Es bleibt noch

$$\sum s_\mu \frac{\sin(\mu+1)h - \sin \mu h}{\mu h} = 2 \sum s_\mu \frac{\sin \frac{1}{2}h}{h} \cdot \frac{\cos\left(\mu + \frac{1}{2}\right)h}{\mu}$$

zu untersuchen. Hier müssen wir auf die gemachte Voraussetzung zurückkommen, daß $s'_\mu = s_\mu \varrho(\mu)$ für wachsende μ unterhalb einer Grenze G bleibt, und daß $\sum 1 : \mu \varrho(\mu)$ konvergent ist. Wir schreiben

$$R''_m = \frac{2 \sin \frac{1}{2}h}{h} \sum_{\mu=q'+1}^{\mu=\infty} \frac{s'_\mu \cos\left(\mu + \frac{1}{2}\right)h}{\mu \varrho(\mu)}.$$

Dies ist das Restglied einer absolut konvergenten Reihe, es wird folglich für wachsende q (und abnehmende h) beliebig klein. Somit unterscheidet

sich $(S(x+h) - S(x-h)) : 2h$ von $s(x)$ für abnehmende h beliebig wenig, es ist $\frac{1}{2} S'(x)^+ + \frac{1}{2} S'(x)^- = s(x)$ w. z. b. w. Ist der vorwärtsgenommene Differentialquotient gleich dem rückwärtsgenommenen, so ist

$$S'(x) = s(x).$$

Um ein einfaches Beispiel zu haben, setzen wir

$$S(x) = \sum \sin \mu x : \mu (\lg \mu)^{1+\alpha},$$

wo α positiv, übrigens beliebig klein ist. Dann ist

$$s(x) = \sum \cos \mu x : (\lg \mu)^{1+\alpha}.$$

Die Koeffizienten dieser Reihe haben einerlei Vorzeichen und konvergieren gegen Null, die Reihe konvergiert für alle x außer $x = 0$. An der Stelle $x = \frac{1}{2}\pi$ ist

$$s_\mu = \sum_{m=\mu}^{m=\infty} \cos \tfrac{1}{2} m\pi \, (\lg m)^{-1-\alpha},$$

und es ist diese Summe wegen der wechselnden Zeichen absolut genommen kleiner als $1 : (\lg \mu)^{1+\alpha}$, so daß $s'_\mu = s_\mu (\lg \mu)^{1+\alpha}$ für wachsende μ endlich bleibt, womit die Voraussetzung der gliedweisen Differentiation an der Stelle $\frac{1}{2}\pi$ erfüllt ist.

93) Die Kosinusreihe. Um eine Funktion $f(x)$ in dem Intervall von 0 bis π durch eine Kosinusreihe darzustellen, kann man $2f(x) \sin x$ durch eine Sinusreihe darstellen, also

$$2f(x) \sin x = \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \sin \mu x \int_0^\pi 2f(\xi) \sin \mu\xi \sin \xi \, d\xi$$

setzen, und nun die Formel

$$2 \sin \xi \sin \mu\xi = -\cos (\mu+1)\xi + \cos (\mu-1)\xi$$

anwenden, wodurch man erhält

$$2f(x) \sin x = \frac{2}{\pi} \sum \sin \mu x \Big(\int_0^\pi f(\xi) \cos (\mu-1)\xi \, d\xi - \int_0^\pi f(\xi) \cos (\mu+1)\xi \, d\xi \Big),$$

oder wenn man setzt

$$b_\mu = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi) \cos \mu\xi \, d\xi,$$

$$2f(x) \sin x = \sum \sin \mu x (b_{\mu-1} - b_{\mu+1})$$

$$= b_0 \sin x + b_1 \sin 2x + b_2 (\sin 3x - \sin x) + \cdots + b_\mu (\sin \overline{\mu+1}\, x - \sin \overline{\mu-1}\, x)$$

$$= b_0 \sin x + 2b_1 \sin x \cos x + 2b_2 \sin x \cos 2x + 2b_3 \sin x \cos 3x + \cdots.$$

Dividiert man nun mit $2 \sin x$, was freilich nur zulässig ist, wenn x von 0 und π verschieden ist, so findet man

$$f(x) = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_\mu \cos \mu x + \cdots$$

$$b_\mu = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi) \cos \mu \xi \, d\xi.$$

Die Reihe stellt eine *gerade* nach 2π periodische Funktion dar, während über $f(x)$ außerhalb $0 \cdots \pi$ nichts vorausgesetzt ist. Soll die Entwicklung auch außerhalb dieses Intervalles $f(x)$ darstellen, so muß $f(x)$ ebenfalls gerade und periodisch sein.

94) Beispiele. Will man $f(x) = x$ durch eine Kosinusreihe darstellen, so kann dies nur zwischen $0 \cdots \pi$ geschehen, weil x ungerade ist. Die Reihe wird demnach für negative x von $0 \cdots -\pi$ die Funktion $-x$ darstellen und weiter wird sich die Funktion periodisch fortsetzen, wovon man sich graphisch ein Bild mache. Es ergibt sich

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots + \frac{\cos (2\mu+1)x}{(2\mu+1)^2} + \cdots \right),$$

welche Reihe absolut konvergent ist. Integriert man die früher gefundene Reihe

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \right)$$

zwischen 0 und x, so erhält man, wenn anders gliedweise Integration gestattet ist, dasselbe Resultat, wie durch die direkte Entwicklung.

Die Funktion x^2 ist gerade, deshalb gilt die Kosinusentwicklung zwischen $-\pi$ und $+\pi$, wenn sie zwischen 0 und π richtig ist. Aus der Formel

$$\int x^2 \cos nx \, dx = \frac{x^2 \sin nx}{n} + \frac{2x \cos nx}{n^2} - \frac{2}{n^3} \sin nx,$$

folgt

$$\int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx = (-1)^n 2\pi : n^2,$$

und also

$$x^2 = \frac{1}{3} \pi^2 + 4 \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{(-1)^\mu \cos \mu x}{\mu^2}.$$

Ersetzt man x durch $x - \pi$ so erhält man die zwischen 0 und π gültige Entwicklung

$$x^2 - 2\pi x + \pi^2 = \frac{1}{3} \pi^2 + 4 \sum \frac{\cos \mu x}{\mu^2},$$

die für $x = 0$ liefert

$$\frac{1}{6}\pi^2 = \sum 1 : \mu^2.$$

95) Entwicklung in eine Kosinus- und Sinusreihe im Intervall $-\pi \cdots \pi$. Eine Funktion, die weder gerade noch ungerade ist, läßt sich, die Zulässigkeit der Entwicklung einer geraden und ungeraden Funktion in eine Kosinus- bzw. Sinusreihe vorausgesetzt, in eine Reihe entwickeln, welche aus den beiden zusammengesetzt ist. Setzt man nämlich

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

so ist der erste Posten eine gerade, der zweite eine ungerade Funktion, und folglich ist

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_\mu \cos \mu x + \cdots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_\mu \sin \mu x -$$

$$a_\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(\xi)+f(-\xi)}{2} \cos \mu\xi \, d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos \mu\xi \, d\xi$$

$$b_\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(\xi)-f(-\xi)}{2} \sin \mu\xi \, d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin \mu\xi \, d\xi.$$

Beispiel: Die Reihe

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$
$$+ \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + - \cdots$$

stellt eine Funktion dar, welche zwischen 0 und $-\pi$ Null, zwischen 0 und π aber x ist.

Die Reihe für $f(x)$ läßt sich in die Form setzen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos \mu(x-\xi)\, d\xi.$$

Das erste Glied ist der Mittelwert der Funktion $f(x)$ im Intervall $-\pi \cdots \pi$.

96) Macht man in der letzten Formel die Substitutionen

$$x = \frac{2\pi\left(x' - \frac{1}{2}(a+b)\right)}{b-a}, \qquad \xi = \frac{2\pi\left(\xi' - \frac{1}{2}(a+b)\right)}{b-a};$$

$$x' = \frac{b-a}{2\pi}x + \frac{a+b}{2}, \qquad \xi' = \frac{b-a}{2\pi}\xi + \frac{a+b}{2};$$

und ersetzt

$$f\left(\frac{2\pi\left(x'-\frac{1}{2}(a+b)\right)}{b-a}\right)$$

durch $f(x')$, so folgt mit Fortlassung der Akzente

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum a_\mu \cos\frac{2\mu\pi x}{b-a}+\sum b_\mu \sin\frac{2\mu\pi x}{b-a},$$

$$a_\mu=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(\xi)\cos\frac{2\mu\pi\xi}{b-a}\,d\xi,\quad b_\mu=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(\xi)\sin\frac{2\mu\pi\xi}{b-a}\,d\xi.$$

Ist insbesondere $a=-b$, und ist $f(x)$ gerade, so folgt

$$b_\mu=0,\qquad a_\mu=\frac{2}{b}\int_0^b f(\xi)\cos\frac{\mu\pi\xi}{b}\,d\xi.$$

Ist $f(x)$ ungerade, so folgt

$$a_\mu=0,\qquad b_\mu=\frac{2}{b}\int_0^b f(\xi)\sin\frac{\mu\pi\xi}{b}\,d\xi.$$

97) Wird die Entwickelbarkeit einer Funktion $f(x)$ im Intervall von $-\pi$ bis π vorausgesetzt, wird also die Darstellung

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty(a_\mu\cos\mu x+b_\mu\sin\mu x)$$

als möglich angenommen, so kann man die Koeffizienten dadurch bestimmen, daß man die Integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\mu x\,dx,\qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\mu x\,dx$$

bildet. Wird nun die Integration rechts gliedweise ausgeführt, so ist

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\mu x\sin\nu x\,dx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\mu x\cos\nu x\,dx=\begin{matrix}0,\\ \pi,\end{matrix}\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin\mu x\sin\nu x\,dx=\begin{matrix}0,\ \mu\gtrless\nu\\ \pi,\ \mu=\nu\end{matrix}.$$

Aber diese Koeffizientenbestimmung ist in allen Fällen unsicher, in welchen sie nicht eine absolut konvergente Reihe liefert, weil in andern Fällen die Konvergenz, selbst wenn sie überall statt hat, sich bei Annäherung von x an einzelne Stellen mehr und mehr (unendlich) verzögern kann, und dann die gliedweise Integration wie wir unter 87) sahen, möglicherweise zu

falschen Resultaten führt. Einen andern Fall unendlich verzögerter Konvergenz bildet die Reihe

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots$$

an der Stelle $x = 0$. Denn für sehr kleine Werte von x geben eine sehr große Anzahl von Gliedern von Anfang an nahe den Wert Null, während die Reihe nahe den Wert $\frac{1}{2}\pi$ hat, so daß sehr entfernte Glieder erst die wahre Summe bewirken. Aus solchen Fällen hat zuerst Seidel die Möglichkeit ungleichmäßiger Konvergenz entdeckt.

98) Summation der Fourierschen Reihe. Der Weg nun, der unter gewissen Bedingungen, die der Funktion $f(x)$ aufzuerlegen sind, zum strengen Nachweis der Entwickelbarkeit führt, besteht in Summation der Fourierschen Reihe. Dieser Weg ist gewissermaßen der umgekehrte als der ursprüngliche. Man entwickelt nicht eine gegebene Funktion in eine trigonometrische Reihe, sondern fragt nach der Funktion, die durch eine Reihe von gegebener Form dargestellt ist. Die Formeln die zum Ziele führen, liegen unter 44), 45) bereit vor. — Die Summe der ersten n Glieder einer Fourierschen Reihe ist nach § 80

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{1}^{n} f(\xi)\cos\mu(x-\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\xi)\sin\frac{2n+1}{2}(x-\xi)}{2\sin\frac{1}{2}(x-\xi)}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x} \frac{f(\xi)\sin\frac{2n+1}{2}(x-\xi)}{\sin\frac{1}{2}(x-\xi)}\, d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{x}^{\pi} \frac{f(\xi)\sin\frac{2n+1}{2}(x-\xi)}{\sin\frac{1}{2}(x-\xi)}\, d\xi,$$

und wenn man im ersten Integral $x-\xi$ durch $2\xi'$, im zweiten $x-\xi$ durch $-2\xi'$ ersetzt, so folgt unter Fortlassung der Akzente

$$\pi S_n(x) = \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{f(x-2\xi)\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\, d\xi + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{f(x+2\xi)\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\, d\xi.$$

99) Nun machen wir die Voraussetzung, daß $f(x \pm 0)$ existieren und setzen

$$f(x-2\xi) - f(x-0) = \varphi(\xi), \quad f(x+2\xi) - f(x+0) = \psi(\xi).$$

Alsdann ist

$$\pi S_n(x) = \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{f(x-0)\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\,d\xi + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\varphi(\xi)\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\,d\xi$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{f(x+0)\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\,d\xi + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\psi(\xi)\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2}\pi\,(f(x-0)+f(x+0)) + \varepsilon_n$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\varphi(\xi)\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\,d\xi + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\psi(\xi)\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\,d\xi.$$

Sind $\varphi(\xi):\xi$, $\psi(\xi):\xi$ *bis an die Stelle* $\xi = 0$ *unbedingt integrable Funktionen, so ist nach* § 44 *für* $\lim n = \infty$, *wenn* x *zwischen* $-\pi$ *und* $+\pi$ *liegt,*

$$S(x) = \frac{1}{2}f(x-0) + \frac{1}{2}f(x+0).$$

Die Reihe $S(x)$ *stellt da, wo* $f(x)$ *stetig ist und den eben angegebenen Integrabilitätsbedingungen genügt,* $f(x)$ *dar, wo* $f(x)$ *unstetig ist, den Mittelwert zwischen* $f(x-0)$ *und* $f(x+0)$.

An den Stellen $x = -\pi$, π aber ist

$$S(\pm\pi) = \frac{1}{2}f(-\pi+0) + \frac{1}{2}f(\pi-0).$$

100) Die Dirichletsche Bedingung. Wir haben gesehen, daß das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi = \int_0^\infty \frac{\sin\omega\xi}{\xi}\,d\xi$$

einen endlichen Wert hat. Wenn aber das letzte Integral von 0 bis b erstreckt wird, so läßt sich leicht eine obere Grenze angeben, die seine Werte für beliebige b nicht überschreiten. Es ist

$$\int_0^b \frac{\sin\omega\xi}{\xi}\,d\xi = \int_0^{b:\omega} \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi = \int_0^c \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi + \int_{n\pi}^c \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi,$$

wenn c zwischen $n\pi$ und $(n+1)\pi$ liegt. Diese Integrale haben abwechselnde Zeichen, und jedes folgende ist absolut genommen kleiner als das voraufgehende. Da nach dem ersten Mittelwertsatze das erste Integral kleiner als π ist und ebenso das letzte vorkommende Integral, so erkennt man, daß für beliebige, also auch für sehr kleine b

$$\int_0^b (\sin \omega\xi : \xi)\, d\xi < 2\pi$$

ist, was wir als Lemma voraufnehmen.

Verschwindet der Ausdruck $f(x+2\xi) - f(x+0) = \psi(\xi)$ mit abnehmenden ξ, ohne daß jedoch $\psi(\xi) : \xi$ bis an $\xi = 0$ heran unbedingt oder überhaupt integrabel ist, ist aber $f(x)$ von der Stelle x an eine übrigens beliebig kleine, aber bestimmte Strecke ε hindurch *monoton*, und verhält sich $f(x)$ rückwärts in gleicher Weise, so gilt nach Dirichlet die Fouriersche Entwicklung. Wir zerlegen das Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}(\pi - x)} \frac{\psi(x) \sin(2n+1)\xi}{\sin \xi}\, d\xi$$

in zwei Integrale über Teilintervalle von 0 bis δ, wo $\delta < \varepsilon$ ist, und von δ bis $\frac{1}{2}(\pi - x)$. Wird δ beliebig klein gegeben, so kann doch n so groß genommen werden (44)), daß das zweite Integral beliebig klein wird, wobei nicht ausgeschlossen ist, daß ψ (also f) in diesem Intervall irgendwo unendlich groß wird, wenn die Funktion nur unbedingt integrabel ist. Das Integral von 0 bis δ, weil dort ψ monoton ist, kann nach dem zweiten Mittelwertsatze geschrieben werden

$$\int_0^{\delta} \frac{\psi(\xi) \sin(2n+1)\xi}{\sin \xi}\, d\xi = 0 \int_0^{\delta'} \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin \xi}\, d\xi + \psi(\delta) \int_{\delta'}^{\delta} \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin \xi}\, d\xi,$$

wo δ' zwischen 0 und δ liegt. Dieser Ausdruck kann wegen des Faktors $\psi(\delta)$ dadurch beliebig klein gemacht werden, daß δ klein genug genommen wird. Dazu muß nachgewiesen werden, daß

$$\int_{\delta'}^{\delta} \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin \xi}\, d\xi = \int_{\delta'}^{\delta} \frac{\sin(2n+1)\xi}{\xi}\, d\xi + \int_{\delta'}^{\delta} \sin(2n+1)\xi\, \frac{(\xi - \sin\xi)}{\xi \sin \xi}\, d\xi$$

eine von n unabhängige obere Grenze besitzt. Von dem letzten Integrale ist dies unmittelbar klar. Das erste aber ist gleich

$$\int_0^{\delta} \frac{\sin(2n+1)\xi}{\xi}\, d\xi - \int_0^{\delta'} \frac{\sin(2n+1)\xi}{\xi}\, d\xi$$

und dieser Ausdruck ist nach dem Lemma kleiner als 2π.

Damit ist der Dirichletsche Satz erwiesen.

101) Beispiel einer stetigen, nicht überall durch die Fouriersche Reihe darstellbaren Funktion. Ist die integrable Funktion $f(x)$ an der Stelle x stetig, so gibt 99) Fälle an, in denen sie dort durch die Fouriersche Reihe darstellbar ist, ohne daß sie eine monotone Umgebung besitzt. Daß aber auch der entgegengesetzte Fall vorkommt, lehrt folgendes Beispiel.

Es werde in diesem Paragraphen zur Abkürzung

$$[\lambda] = 3 \cdot 5 \cdots (2\lambda + 1)$$

gesetzt, und $f(x)$ sei eine Funktion, die zwischen π und $\frac{2}{3}\pi$ den Wert Null, zwischen $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}\pi$ gleich $c_2 \sin \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5x$, zwischen

$$\frac{2\pi}{[\lambda-1]}, \frac{2\pi}{[\lambda]} \text{ gleich } c_\lambda \sin \frac{1}{2}[\lambda]x$$

ist, usw., für $x = 0$ und für negative x soll sie den Wert Null haben. Ferner sollen die c_λ mit wachsendem λ gegen Null konvergieren. Die so definierte Funktion ist überall stetig und hat für $-\pi$ und $+\pi$ gleiche Werte. Gleichwohl konvergiert die sie im allgemeinen darstellende Fouriersche Reihe für $x = 0$ nicht, wenn die c_λ hinreichend langsam gegen Null abnehmen. Ihre Summe hat in der Nachbarschaft des Punktes $x = 0$ unendlich viele Maxima und Minima.

Die Summe der ersten $\frac{1}{2}([\mu]-1)$ Glieder der Fourierschen Reihe hat für $x = 0$ den Wert

$$Q_\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{f(2\xi)\sin[\mu]\xi}{\sin\xi}\, d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \frac{f(2\xi)\sin[\mu]\xi}{\sin\xi}\, d\xi.$$

Wir zerlegen das Integral in mehrere, über Teilintervalle erstreckte, setzen

$$J_\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi:[\mu]} \frac{f(2\xi)\sin[\mu]\xi}{\sin\xi}\, d\xi, \quad K_\mu = \frac{c_\mu}{\pi}\int_{\pi:[\mu]}^{\pi:[\mu-1]} \frac{\sin^2[\mu]\xi}{\sin\xi}\, d\xi,$$

$$L_{\lambda,\mu} = \frac{c_\lambda}{\pi}\int_{\pi:[\lambda]}^{\pi:[\lambda-1]} \frac{\sin[\lambda]\xi \sin[\mu]\xi}{\sin\xi}\, d\xi, \quad \Sigma_\mu = \sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} L_{\lambda,\mu}.$$

Im Integranden von J_μ wechselt der Faktor $\sin[\mu]\xi : \sin\xi$ im Integrationsintervalle sein Zeichen nicht, man kann daher, weil $\sin\xi > \frac{1}{2}\xi$ ist, wenn ξ' im Intervalle liegt, schreiben

$$J_\mu = \frac{f(2\xi')}{\pi}\int_0^{\pi:[\mu]} \frac{\sin[\mu]\xi}{\sin\xi}\,d\xi < \frac{2f(2\xi')}{\pi}\int_0^{\pi:[\mu]} \frac{\sin[\mu]\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{2f(2\xi')}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi < 2f(2\xi'),$$

wo die Ungleichungen sich auf den absoluten Betrag beziehen. Hieraus folgt bei unserer Annahme über die c_λ, daß J_μ mit wachsenden μ absolut genommen beliebig klein wird.

Ferner ist

$$\begin{aligned} K_\mu &= \frac{c_\mu}{\pi}\int_{\pi:[\mu]}^{\pi:[\mu-1]} \frac{\sin^2[\mu]\xi}{\xi}\,d\xi + \frac{c_\mu}{\pi}\int_{\pi:[\mu]}^{\pi:[\mu-1]} \sin[\mu]\xi\,\frac{\xi-\sin\xi}{\xi\sin\xi}\,d\xi \\ &= \frac{c_\mu}{2\pi}\int_{\pi:[\mu]}^{\pi:[\mu-1]} \frac{d\xi}{\xi} - \frac{c_\mu}{2\pi}\int_{\pi:[\mu]}^{\pi:[\mu-1]} \frac{\cos 2[\mu]\xi}{\xi}\,d\xi + \frac{c_\mu}{\pi}\int_{\pi:[\mu]}^{\pi:[\mu-1]} \sin[\mu]\xi\,\frac{\xi-\sin\xi}{\xi\sin\xi}\,d\xi \\ &= \frac{c_\mu}{2\pi}\,lg(2\mu+1) - \frac{c_\mu}{2\pi}\,q_\mu + \frac{c_\mu}{\pi}\,\delta_\mu, \end{aligned}$$

$$\delta_\mu = \int_{\pi:[\mu]}^{\pi:[\mu-1]} \sin[\mu]\xi\,\frac{\xi-\sin\xi}{\xi\sin\xi}\,d\xi, \qquad q_\mu = \int_{\pi:[\mu]}^{\pi:[\mu-1]} \frac{\cos 2[\mu]\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Der erste Mittelwertsatz lehrt, daß δ_μ mit wachsenden μ beliebig klein wird. Der zweite Mittelwertsatz aber lehrt, daß $q_\mu < 1 : 2\pi$ ist. Denn man hat nach dem zweiten Mittelwertsatze

$$\begin{aligned} q_\mu &= \int_{\pi:[\mu]}^{\pi:[\mu-1]} \frac{\cos 2[\mu]\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\sin 2[\mu]\xi' - \frac{[\mu-1]}{2\pi[\mu]}\sin 2[\mu]\xi' \\ &= \frac{\sin 2[\mu]\xi'}{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2\mu+1}\right), \end{aligned}$$

wo ξ' im Intervalle $\pi : [\mu]$ bis $\pi : [\mu-1]$ liegt. Dieser Ausdruck ist kleiner als $1 : 2\pi$. Es ist demnach

$$K_\mu = \frac{c_\mu\,lg(2\mu+1)}{2\pi} + \eta_\mu,$$

wo η_μ mit wachsenden μ klein wird.

Endlich ist

$$L_{\lambda,\mu} = \frac{c_\lambda}{2\pi}\int_{\pi:[\lambda]}^{\pi:[\lambda-1]} \frac{\cos([\mu]-[\lambda])\xi}{\sin\xi}\,d\xi - \frac{c_\lambda}{2\pi}\int_{\pi:[\lambda]}^{\pi:[\lambda-1]} \frac{\cos([\mu]+[\lambda])\xi}{\sin\xi}\,d\xi.$$

Da $1 : \sin \xi$ im Integrationsintervalle monoton ist, so läßt sich auf beide Integrale der zweite Mittelwertsatz anwenden. Beachtet man, daß $2 \sin (\pi : [\lambda]) > \pi : [\lambda]$ ist, so findet man auf diese Weise, da $\lambda \leqq \mu - 1$ ist, absolut genommen,

$$L_{\lambda,\mu} < \frac{4c_\lambda}{\pi^2} \frac{[\lambda]}{[\mu]-[\lambda]} \leqq \frac{2c_\lambda}{\pi^2 \mu}.$$

Demnach ist $\Sigma_\mu < 2c_2 : \pi^2 = 2\theta c_2 : \pi^2$, wo θ ein positiver oder negativer echter Bruch ist. Es ließe sich durch genauere Schätzung nachweisen, daß Σ_μ mit wachsendem μ gegen Null konvergiert, das ist aber für unsere Zwecke nicht nötig. Somit erhalten wir

$$Q_\mu = \frac{c_\mu}{2\pi} lg\,(2\mu+1) + \eta_\mu + \frac{2\theta c_2}{\pi^2}.$$

Wird nun $1 : c_\mu$ langsamer unendlich groß für wachsende μ als $lg(2\mu+1)$, ist z. B. $c_\mu = 1 : \sqrt{lg(2\mu+1)}$, so wächst Q_μ mit μ über alle Grenzen, und die Fouriersche Reihe ist divergent. Ist $c_\mu = A_\mu : lg(2\mu+1)$, und nähern sich die A_μ einer bestimmten von Null verschiedenen Zahl, so konvergiert die Summe der ersten $\frac{1}{2}([\mu]-1)$ Glieder der Reihe gegen $lim\, A_\mu$, woraus jedoch noch nicht die Konvergenz der Reihe folgt. Wechseln die A_μ, endlich bleibend, ihr Zeichen, so oszilliert die Reihe.

Du Bois-Reymond hat wohl zuerst die Existenz stetiger Funktionen nachgewiesen, die nicht überall durch die Fouriersche Reihe darstellbar sind. Das obige Beispiel rührt von Herrn H. A. Schwarz her.

102) Die überall stetige, nicht differenzierbare Funktion von Weierstraß. Es sei a eine ganze ungerade Zahl und b ein echter Bruch, so ist die wohlbestimmte Funktion

$$f(x) = \sum_m b^m \cos(a^m x \pi)$$

überall absolut konvergent und mithin stetig. — Es ist, wie klein auch h sein mag, absolut genommen,

$$\text{I.} \quad \frac{\cos a^m (x+h)\pi - \cos a^m x\pi}{h} < \pi a^m = \theta_m \pi a^m,$$

wo θ_m zwischen -1 und $+1$ liegt.

Beweis. Es ist

$$\frac{\cos a^m (x+h)\pi - \cos a^m x\pi}{h} = -2 \frac{\sin a^m \left(x + \frac{1}{2}h\right)\pi \sin \frac{1}{2} h a^m \pi}{h}$$

$$= -\pi a^m \sin a^m \left(x + \frac{1}{2}r\right) \frac{\sin \frac{1}{2} a^m h\pi}{\frac{1}{2} a^m h\pi} = \theta_m \pi a^m.$$

Daraus folgt, wenn $ab > 1$ ist,

$$\text{II.} \quad abs \sum_{m=0}^{m=n-1} b^m \frac{\cos a^m(x+h)\pi - \cos a^m x\pi}{h} < \frac{(ab)^n - 1}{ab-1} < \frac{(ab)^n}{ab-1},$$

$$\text{IIa.} \quad \sum_{0}^{n-1} b^m \frac{\cos a^m(x+h)\pi - \cos a^m x\pi}{h} = \frac{\theta(ab)^n}{ab-1}, \quad -1 < \theta < 1.$$

Soll eine Funktion $f(x)$ an der Stelle x einen Differentialquotienten besitzen, so muß $(f(x') - f(x)) : (x' - x)$ einem festen Grenzwerte zustreben, auf welche Art auch x' dem Werte x genähert wird. Nun werde x_n so bestimmt, daß

$$\text{III.} \quad a^n x - \alpha_n = x_n, \quad x = (x_n + \alpha_n) : a^n,$$

wird, wo

$$-\frac{1}{2} < x_n \leqq \frac{1}{2}$$

ist, so daß x_n, von den Sprungstellen abgesehen (vgl. § 33), die Riemannsche Funktion $r(a^n x)$, und α_n eine ganze Zahl ist. Dann werde

$$x' = \frac{\alpha_n - 1}{a^n}, \; a^n x' = \alpha_n - 1; \; x'' = \frac{\alpha_n + 1}{a^n}, \; a^n x'' = \alpha_n + 1$$

gesetzt. So ist

$$\text{IV.} \quad x' - x = -\frac{x_n + \alpha_n}{a^n} + \frac{\alpha_n - 1}{a^n} = -\frac{1 + x_n}{a^n},$$

$$\text{V.} \quad x'' - x = -\frac{x_n + \alpha_n}{a^n} + \frac{\alpha_n + 1}{a^n} = \frac{1 - x_n}{a^n}.$$

Diese Differenzen konvergieren für wachsende n gegen Null. — Es ist

$$\cos(a^{m+n} x'\pi) = \cos a^m(\alpha_n - 1)\pi = -(-1)^{\alpha_n} = \cos(a^{m+n} x''\pi),$$

$$\cos(a^{n+m} x\pi) = \cos\left(a^{n+m}\left(x' + \frac{1 + x_n}{a^n}\right)\pi\right) = \cos(a^m(x' a^n + 1 + x_n)\pi)$$

$$= \cos a^m(\alpha_n + x_n)\pi = (-1)^{\alpha_n} \cos a^m x_n \pi.$$

Daraus folgt

$$\text{VI.} \quad \cos a^{n+m} x'\pi - \cos a^{n+m} x\pi = -(-1)^{\alpha_n} - (-1)^{\alpha_n} \cos a^m x_n \pi$$

$$= -(-1)^{\alpha_n}(1 + \cos a^m x_n \pi),$$

$$\text{VII.} \quad \cos a^{n+m} x''\pi - \cos a^{n+m} x\pi = -(-1)^{\alpha_n}(1 + \cos a^m x_n \pi).$$

Hieraus fließt

$$(f(x')-f(x)):(x'-x)$$

$$=\sum_0^{n-1}\frac{b^m\cos a^m x'-b^m\cos a^m x}{x'-x}+(ab)^n\sum_0^{\infty}\frac{b^m\cos a^{n+m}x'\pi-b^m\cos a^{n+m}x\pi}{a^n(x'-x)}$$

$$=\frac{\theta'(ab)^n}{ab-1}+(-1)^{\alpha_n}(ab)^n\sum_0^{\infty}\frac{b^m(1+\cos a^m x_n\pi)}{1+x_n}.$$

Die Zahl θ' ist ein positiver oder negativer echter Bruch, die Glieder der Summe sind sämtlich positiv und das Anfangsglied der Summe ist größer als $\frac{2}{3}$. Werden unter η', η'' positive Zahlen größer als Eins verstanden, so kann man schreiben

$$\sum\frac{b^m(1+\cos a^m x_n\pi)}{1+x_n}=\frac{2}{3}\eta',\quad \sum\frac{b^m(1+\cos a^m x_n\pi)}{1-x_n}=\frac{2}{3}\eta''.$$

Es ist demnach

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}=(-1)^{\alpha_n}(ab)^n\eta'\left(\frac{2}{3}+\frac{\theta'}{\eta'}\frac{\pi}{ab-1}\right),$$

$$\frac{f(x'')-f(x)}{x''-x}=(-1)^{\alpha_n+1}(ab)^n\eta''\left(\frac{2}{3}+\frac{\theta''}{\eta''}\frac{\pi}{ab-1}\right).$$

Nimmt man nun $ab>1+\frac{3}{2}\pi$, $\pi:(ab-1)<\frac{2}{3}$ an, so wachsen diese Ausdrücke, mit abwechselnden Zeichen über alle Grenzen. Es existiert deshalb weder ein vorwärts- noch ein rückwärtsgenommener Differentialquotient. Für a und b kann man z. B. die Zahlen nehmen

$$a=7,\ b=0{,}9,\ ab=6{,}3>1+\frac{3}{2}\pi.$$

103) Riemann hat darauf aufmerksam gemacht, daß trigonometrische Reihen auch konvergieren können, ohne daß ihre Koeffizienten mit wachsenden Indizes gegen Null konvergieren.

Als einfachstes Beispiel gilt die Reihe

$$\sin x+\sin 1\cdot 2x+\sin 1\cdot 2\cdot 3x+\sin 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4x+\cdots$$
$$+\sin 1\cdot 2\cdot 3\cdots\mu x+\cdots,$$

welche offenbar für alle x, die rationale Teile von π sind, konvergiert, weil sie abbricht. Sie konvergiert aber auch für unendlich viele irrationale Teile von π, z. B. für

$$x=2\pi e^{-1}=2\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdot+\cdots\right)\pi,$$

denn für diesen Wert sind die Terme der Reihe abwechselnd positiv und negativ und nehmen fortwährend gegen Null ab.

104) Die Frage nach der Einheitlichkeit der Entwicklung in eine Fouriersche Reihe, oder was dasselbe ist, die Frage, ob die Zahl Null überall durch eine trigonometrische Reihe darstellbar sei, deren Koeffizienten nicht sämtlich Null sind, ist subtil. Verlangt man, daß die darstellende Reihe *gleichmäßig* konvergent sein soll, so daß gliedweise Integration zulässig ist, so folgt aus 86) unmittelbar, daß die Entwicklung nur auf eine Weise möglich ist. Läßt man aber ungleichmäßig konvergente Reihen zu, so wird die Sache schwieriger, ist aber durch Herrn G. Cantor im Bd. 72 des Crelleschen Journals erledigt. Es gibt nur eine Darstellung. Wir gehen hier nicht darauf ein (vgl. § 112), begnügen uns mit der Bemerkung, daß, wenn es eine trigonometrische Reihe gibt, deren Koeffizienten nicht sämtlich verschwinden, die aber überall Null darstellt, — daß es dann unendlich viele solcher Reihen gibt. Denn ist $S(x)$ eine solche Reihe, so sind auch

$$\tfrac{1}{2}S(x)+\tfrac{1}{2}S(-x),\quad \tfrac{1}{2}S(x)-\tfrac{1}{2}S(-x)$$

solche Reihen. Die erste ist eine reine Kosinusreihe, die zweite eine reine Sinusreihe. Macht man in der zweiten die Substitution $x+\pi$ für x und addiert die erhaltene Reihe zur Mutterreihe, so erhält man wieder eine Reihe, die Null darstellt, und in der nur gerade Multipla von x unter den *sinus* vorkommen. So könnte man fortfahren und beliebig viele Nullreihen erhalten.

Schwingende Saiten.

105) Wird ein homogener unendlich langer gespannter Faden aus der Gleichgewichtslage, die die x-Achse sein mag, gebracht, so werden die transversalen Schwingungen in einer Ebene, der xy-Ebene, durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

bestimmt, wenn η die in der Richtung der y-Achse gelegene Ausbiegung der Saite an der Stelle x ist und t die Zeit bedeutet. Die Größe α hängt von der Spannung ab und wird als konstant angenommen. Das vollständige Integral der Differentialgleichung ist

$$\eta=\varphi(x+\alpha t)+\psi(x-\alpha t)=\eta_l+\eta_r.$$

Die Funktionen φ, ψ sind der Natur des Problems nach stetige Funktionen. Wegen der Differentialgleichung, die sie befriedigen sollen, müssen sie auch als differenzierbare Funktionen angesehen werden. Aber schon in den einfachsten Beispielen zeigt es sich, daß solche Ausnahmen von der Betrachtung nicht auszuschließen sind, in denen die Differentialgleichung an einzelnen Stellen nicht erfüllt ist, weil die Funktionen φ oder ψ dort nicht zweimal differenzierbar sind, z. B. wenn die Kurve $y = \varphi(x)$ an einer Stelle eine Ecke hat. Man wird in dergleichen Fällen die Funktionen φ, ψ um solche Funktionen φ_1, ψ_1 abändern können, die nur in sehr kleiner Umgebung der Ausnahmestellen von Null verschiedene und zwar wenig verschiedene Werte haben, der Art, daß $\varphi + \varphi_1$, $\psi + \psi_1$ überall die Differentialgleichung befriedigen. Die durch $\eta = \varphi + \varphi_1 + \psi + \psi_1$ bestimmte Bewegung wird sich dann von der durch $\eta = \varphi + \psi$ bestimmten sehr wenig unterscheiden, und wir dürfen annehmen, daß auch in solchen Fällen die Bewegung durch $\eta = \varphi + \psi$ bestimmt ist. Genauere Untersuchungen darüber sind von Christoffel (1877) angestellt.

Liegt die Saite, die wir zur x-Achse machen, horizontal vor uns, so ergibt sich, daß die Komponente $\eta_l = \varphi(x + \alpha t)$ der Ausweichung mit der Geschwindigkeit α nach links, die Ausweichung $\eta_r = \psi(x - \alpha t)$ mit derselben Geschwindigkeit nach rechts läuft. Denn ist zur Zeit $t = 0$ $\eta_l = \eta_l^0$ an der Stelle x_0, so ist zur Zeit t die Ausweichung η_l gleich η_l^0 an einer Stelle, die durch die Gleichung $x + \alpha t = x_0$ bestimmt wird, also an der Stelle $x = x_0 - \alpha t$. Der Punkt x läuft mit der konstanten Geschwindigkeit α nach links. Ist zur Zeit $t = 0$ $\eta = \mathfrak{F}(x)$ und η', die Geschwindigkeit des Punktes x, gleich $\mathfrak{G}(x)$, so ist

$$\mathfrak{F}(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad \mathfrak{G}(x) = \alpha\varphi'(x) - \alpha\psi'(x),$$

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{\alpha}\int \mathfrak{G}(x)\,dx = \mathfrak{H}(x),$$

$$\eta_l = \tfrac{1}{2}\mathfrak{F}(x + \alpha t) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}(x + \alpha t), \quad \eta_r = \tfrac{1}{2}\mathfrak{F}(x - \alpha t) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}(x - \alpha t).$$

Die Integrationskonstante ist unwesentlich, weil sie aus $\eta = \eta_l + \eta_r$ herausfällt. Nehmen wir nun für $\mathfrak{F}(x)$, $\mathfrak{G}(x)$ *ungerade* periodische Funktionen an mit der Periode $2l$, so sind sie gegeben, wenn sie zwischen 0 und l gegeben sind. Die Funktion $\mathfrak{H}(x)$ ist dann, wie leicht zu erweisen, eine gerade periodische Funktion. Bei dieser Annahme ist $\eta = \eta_l + \eta_r$ für $x = 0$ und $x = l$ fortwährend Null, diese beiden Punkte bleiben immer in Ruhe. Die Bewegung geht also so vor sich, als ob die Saite bei 0 und l befestigt wäre, beim Studium der Bewegung dieses Stückes kann die Saite außerhalb dieser Strecke als fiktiv angesehen werden, sie kann in Wirklichkeit ganz fehlen.

106) Nach dem Fourierschen Theorem ist nun

$$\mathfrak{F}(x) = b_1 \sin\frac{\pi x}{l} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \cdots + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} + \cdots,$$

$$\mathfrak{H}(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\frac{\pi x}{l} + b_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + \cdots + a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \mathfrak{F}(\xi) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \mathfrak{H}(\xi) \cos\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi = -\frac{2}{n\pi\alpha}\int_0^l \mathfrak{G}(\xi) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi.$$

Das Glied a_0 kann nach einer obigen Bemerkung fortgelassen werden. Es ist also

$$\eta = \frac{1}{2}\mathfrak{F}(x+\alpha t) + \frac{1}{2}\mathfrak{H}(x+\alpha t) + \frac{1}{2}\mathfrak{F}(x-\alpha t) - \frac{1}{2}\mathfrak{H}(x-\alpha t)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{(m)} b_m \sin\frac{m(x+\alpha t)}{l} + \frac{1}{2}\sum_{(m)} a_m \cos\frac{m(x+\alpha t)}{l}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum b_m \sin\frac{m(x-\alpha t)}{l} - \frac{1}{2}\sum a_m \cos\frac{m(x-\alpha t)}{l},$$

worin man die übereinander stehenden Glieder zusammenziehen kann.

Da a_0 fortgelassen werden kann, so ist in dem Ausdrucke

$$\eta = \sum b_m \sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{m\pi\alpha t}{l} - \sum a_m \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{m\pi\alpha t}{l}$$

die Summation über m von 1 bis ∞ zu erstrecken. Setzen wir

$$b_n = -A_n \sin\frac{n\pi\alpha t_n}{l}, \qquad a_n = -A_n \cos\frac{n\pi\alpha t_n}{l}, \qquad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

so können wir schreiben:

$$\eta = \sum A_m \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{m\pi\alpha(t-t_n)}{l} = \sum \eta_m,$$

wo η_n die Partialausweichung, oder wie wir sagen wollen, die Partialwelle

$$\eta_n = A_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\alpha(t-t_n)}{l}$$

bedeutet. Diese Partialwelle läßt die Punkte

$$x = l:n, \quad 2l:n, \cdots (n-1)\,l:n$$

in Ruhe, sie heißen Knotenpunkte der Partialwelle.

107) Ganz ähnlich wie der Analytiker die Bewegung einer schwingenden Saite in Partialbewegungen oder Partialwellen zerlegt, verfährt auch das Ohr, das die Gesamtschwingungen als Klang empfindet, die Partialwellen aber als Töne. Nach der Zeit $T = 2l:\alpha$ hat die ganze Saite ihren

ursprünglichen Zustand wieder erreicht und beginnt von da an die abgelaufene Bewegung periodisch zu wiederholen. T heißt die Schwingungsdauer des Klanges und zugleich des tiefsten Tones. $T_n = 2l : n\alpha$ ist die Schwingungsdauer des n^{ten} Partialtones, von ihr hängt seine Tonhöhe ab. Ein Ton ist um so höher, je kürzer seine Schwingungsdauer ist. Die Empfindung eines Partialtones hängt von der mittleren lebendigen Kraft der zugehörigen Bewegung ab, wenn sie auch schwerlich dieser Energie unmittelbar proportional ist. Sie hängt vielmehr auch noch von der Tonhöhe selbst ab, denn es gibt eine untere und obere Grenze der Wahrnehmbarkeit der Töne in bezug auf ihre Höhe. Immerhin wird die Empfindung in erster Näherung durch die mittlere Energie abgeschätzt werden können. Die Empfindung eines Tones wächst mit seiner Energie. Die verschiedenartige Mischung der Obertöne gibt die *Klangfarbe*. Die Höhe eines Klanges wird der des Grundtones, der die längste Schwingungsdauer hat, gleichgesetzt.

Das Ohr empfindet wie gesagt die Gesamtschwingung als Klang, bei aufmerksamen Hinhören aber, insbesondere mit Unterstützung durch Resonatoren, hört es die Partialtöne einzeln. Schlägt man auf dem Klavier einen Ton an und hebt den Dämpfer von einer Taste die einem Oberton entspricht (Oktave, Duodecime usw.) und läßt nun die erste Taste fallen, so hört man den gehobenen Oberton ganz deutlich. Man hört nichts, wenn man einen Dämpfer hebt, der nicht zu einem Oberton gehört. Freilich ist das Hören auf die ersten Obertöne beschränkt, wahrscheinlich kommen die höheren Obertöne wegen der Unvollkommenheit der Elastizität der Saite überhaupt nicht zustande, so daß die Theorie nur eine Annäherung an die Wirklichkeit darstellt. Dies ist umsomehr der Fall, als die Tatsache der Reibung, die das Abklingen der Töne verursacht, was eine Abhängigkeit der Intensitätskoeffizienten von der Zeit voraussetzt, nicht berücksichtigt wurde.

Bei der lebendigen Kraft wollen wir ein wenig verweilen.

108) Ist ω der Querschnitt, ϱ die Dichte, M die gesamte Masse der Saite (zwischen 0 und l), so ist die lebendige Kraft der Partialwelle η_n zur Zeit t gleich

$$\frac{n^2\pi^2\alpha^2 A_n^2 \varrho\omega}{2l^2} \cos^2 \frac{n\pi\alpha(t-t_n)}{l} \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{n^2\pi^2\alpha^2 A_n^2 M}{4l^2} \cos^2 \frac{n\pi\alpha(t-t_n)}{l}.$$

Sind $\eta_m \eta_n$ zwei verschiedene Partialwellen, so ist zu einer gegebenen Zeit

$$\int_0^l \eta'_m \eta'_n\, dx = \text{Const.} \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx = 0.$$

Demnach ist

$$\int_0^l (\eta'_m + \eta'_n)^2\, dx = \int_0^l \eta'_m \eta'_m\, dx + \int_0^l \eta'_n \eta'_n\, dx,$$

oder es ist zu jeder Zeit die lebendige Kraft der Summe zweier Partialwellen gleich der Summe der lebendigen Kräfte der Einzelwellen. Dieser Satz gilt natürlich auch für Summen von mehr Gliedern, und kann unter gewissen Kautelen auch auf unendliche Reihen übertragen werden. Für die gezupfte Saite soll die mittlere lebendige Kraft E einmal aus der Reihe, als ob sie als Summe angesehen werden könne, ein andermal direkt ermittelt werden.

Die mittlere lebendige Kraft erhalten wir, wenn wir die lebendige Kraft zur Zeit t über t zwischen 0 und $l:\alpha$ integrieren und dann mit $l:\alpha$ dividieren. So finden wir für die mittlere Energie der n^{ten} Partialwelle den Wert

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\alpha^2 M A_n^2}{4l^2} \frac{\alpha}{l} \int_0^{l:\alpha} \cos^2 \frac{\alpha\pi n(t-t_n)}{l}\, dt = \frac{n^2\pi^2\alpha^2 A_n^2 M}{8l^2}.$$

109) Die Saite bilde zur Zeit $t=0$ über der x-Achse zwischen 0 und l ein Dreieck, dessen Spitze bei $x=c$, $\frac{1}{2}l \leqq c < l$ liegt, und dessen Höhe h ist. $\mathfrak{G}(x)$, die Geschwindigkeit zur Zeit $t=0$, ist Null, deshalb sind die $a_n = 0$. Hingegen ist

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{hx}{c}, \quad 0 \leqq x \leqq c, \quad \mathfrak{F}(x) = \frac{h(l-x)}{l-c}, \quad c \leqq x \leqq l.$$

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{2hl^2}{c(l-c)\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi c}{l} \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$\eta = \frac{hl^2}{c(l-c)\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi c}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi\alpha t}{l},$$

$$\eta' = -\frac{2hl\alpha}{c(l-c)\pi} \sum \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi c}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi\alpha t}{l},$$

$$E_n = \frac{Mh^2l^2\alpha^2}{2c^2(l-c)^2\pi^2 n^2} \sin^2\frac{n\pi c}{l}.$$

Daß hier gliedweise Differentiation zulässig ist, kann man dadurch erweisen, daß man η' direkt bildet und die erhaltene Funktion durch die Fouriersche Reihe darstellt.

Zur Zeit t und zur Zeit $(2l:\alpha) - t = T - t$ ist die Gestalt der Saite dieselbe, die Geschwindigkeiten aber sind einander entgegengesetzte. Man braucht deshalb die Bewegung nur in der Zeit $\frac{1}{2}T = l:\alpha$ zu studieren.

Zupft man die Saite in der Mitte, ist $c = \frac{1}{2} l$, so fallen alle geraden Obertöne aus. — Der Klang oder die Klangfarbe ändert sich mit der Zupfstelle.

Berechnen wir nun die mittlere kinetische Energie nach der obigen Regel, so finden wir

$$E = \sum E_n = \frac{M h^2 l^2 \alpha^2}{2 c^2 (l-c)^2 \pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{n \pi c}{l} = \frac{M h^2 l^2 \alpha^2}{4 c^2 (l-c)^2 \pi^2} \sum \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \cos \frac{2 n \pi c}{l} \right).$$

Nun ist (§ 94)

$$\frac{\pi^2 c^2}{4 l^2} - \frac{2 \pi^2 c}{4 l} + \frac{\pi^2}{6} = \sum \frac{1}{n^2} \cos \frac{2 n \pi c}{l}, \qquad \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \cos \frac{2 n \pi c}{l} \right) = \frac{c(l-c) \pi^2}{l^2},$$

und folglich ist

$$E = M h^2 \alpha^2 : 4 c (l-c).$$

Nun soll die mittlere lebendige Kraft direkt gefunden werden, wobei wir zugleich die Bewegung näher studieren. Wir betrachten die Bewegung in drei Epochen.*) Erstens zu einer Zeit, in der $\alpha t = s \leqq l - c$ ist, zweitens, wenn $l - c \leqq \alpha t = s \leqq c$ ist und drittens, wenn $c \leqq \alpha t = s \leqq l$ ist. Diese Epochen sind Zeitpunkte der ersten halben Schwingungsdauer. Die Argumente der (ungeraden) Funktionen $\mathfrak{F}(x + \alpha t)$, $\mathfrak{F}(x - \alpha t)$ liegen in dieser Zeit zwischen $-l$ und $2l$. Wir brauchen deshalb die Werte der Funktion $\mathfrak{F}$ nur in diesem Intervalle. Es ist

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{h(l+x)}{c-l}, \quad -l \leqq x \leqq -c; \qquad \mathfrak{F}(x) = \frac{hx}{c}, \quad -c \leqq x \leqq c,$$

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{h(l-x)}{l-c}, \quad c \leqq x \leqq 2l - c; \qquad \mathfrak{F}(x) = -\frac{h(2l-x)}{c}, \quad 2l - c \leqq x \leqq 2l.$$

Alsdann ergibt sich bei der Annahme

1) $0 < \alpha t = s < l - c$

für	$0 < x < c - s$,		$c - s \leqq x \leqq l$
η_l	$= -\frac{hx}{2c} + \frac{hs}{2c}$,	$= \frac{h}{2} \frac{x-l}{c-l} - \frac{hs}{2(l-c)}$	$= \frac{1}{2} \mathfrak{F}(x + \alpha t)$,
für	$0 \leqq x < c + s$,		$c + s \leqq x \leqq l$
η_r	$= -\frac{hx}{2c} - \frac{hs}{2c}$,	$= \frac{h}{2} \frac{x-l}{c-l} + \frac{sh}{2(l-c)}$	$= \frac{1}{2} \mathfrak{F}(x - \alpha t)$,
für	$0 \leqq x \leqq c - s$,	$c - s \leqq x \leqq c + s$,	$c + s \leqq x \leqq l$
η	$= -\frac{hx}{c}$,	$= \frac{hx}{2c} + \frac{h}{2} \frac{x-l}{c-l} - \frac{hsl}{2c(l-c)}$,	$= \frac{h(l-x)}{l-c}$.

*) Zum bessern Verständnis mache man sich für irgend einen Moment jeder der drei Epochen für η_l, η_r, η eine Zeichnung. Man hat dafür Modelle.

Die Gestalt der Saite wird zu dieser Zeit aus drei geraden Strecken gebildet, zwei Ecken des Polygons liegen über $c-s$ und $c+s$. Anfangs- und Endseite sind Stücke der ursprünglichen, die Punkte der mittleren Verbindungsseite bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit abwärts, bis die Figur ein Dreieck wird, dessen Ecke über $2c-l$ liegt. Dabei verlängert sich die mittlere Polygonseite, für $c=\frac{1}{2}l$ ist sie der x Achse parallel. Wird $\lambda = \alpha h l : 2c(l-c)$ gesetzt, so ist zur gegebenen Zeit

für	$0 \leqq x \leqq c-s,$	$c-s \leqq x \leqq c+s,$	$c+s \leqq x \leqq l$
η'	$=0,$	$=-\lambda,$	$=0.$

Ist 2) $l-c \leqq \alpha t = s \leqq c$, so ist

für	$0<x<c-s,$	$c-s \leqq x \leqq c-s+2(l-c),$	$x<l$
η_l	$=\frac{hx}{2c}+\frac{hs}{2c},$	$=\frac{h}{2}\frac{l-x}{l-c}-\frac{sh}{2(l-c)},$	$=\frac{hx}{2c}-\frac{(2l-s)h}{2c},$

für $0 \leqq x \leqq l,$

$$\eta_r = \frac{hx}{2s}-\frac{hs}{2c},$$

für	$0 \leqq x \leqq c-s,$	$c-s \leqq x \leqq 2l-c-s,$	$x<l,$
η	$=\frac{hx}{c},$	$=\frac{hx}{2c}+\frac{l-x}{l-c}\frac{h}{2}-\frac{hsl}{2c(l-c)},$	$=\frac{h(x-l)}{c}.$

Die Saite besteht zu dieser Zeit wieder aus drei geraden Strecken. Die erste ist noch ein Stück der ursprünglichen Dreieckseite, die letzte ist ihr parallel und geht durch den Punkt $x=l$. Die verbindende Gerade hat einen Endpunkt (Ecke) auf der oberen Seite der Gleichgewichtslage, einen auf der unteren Seite. Ihre Punkte bewegen sich abwärts, wobei sie ihre Länge nicht ändert, sich aber nach links verschiebt. Für $s=c$ wird die Figur ein Dreieck, dessen Ecke unter $x=2(l-c)$ liegt, dabei ist

für	$x \leqq c-s,$	$c-s \leqq x \leqq 2l-c-s,$	$x \leqq l,$
η'	$=0,$	$=-\lambda,$	$=0.$

Ist 3) $x \leqq \alpha t = s \leqq l$, so ist

für	$0 \leqq x \leqq s-c,$	$s-c \leqq x \leqq l,$
η_l	$=\frac{h}{2}\frac{l-x}{l-c}-\frac{h}{2}\frac{s-2l}{c-l},$	$=\frac{hx}{2c}+\frac{sh}{2c}-\frac{ls}{c},$

für	$0 \leqq x \leqq 2l-c-s,$	$2l-c-s \leqq x \leqq l,$
η_r	$=\frac{h}{2}\frac{l-x}{l-c}+\frac{sh}{2(c-l)},$	$=\frac{hx}{2c}-\frac{sh}{2c},$

für	$0 \leqq x < s-c,$	$s-c \leqq x \leqq 2l-c-s,$	$x \leqq l,$
η	$=h\frac{l-x}{l-c}+\frac{lh}{c-l},$	$=\frac{hx}{2c}+\frac{h}{2}\frac{l-x}{l-c}-\frac{hls}{2c(l-c)},$	$=\frac{h(x-l)}{c}$

Die Gestalt der Saite besteht weiter aus drei geraden Strecken. Die mittlere ist der früheren mittleren parallel, geht mit konstanter Geschwindigkeit abwärts, sich gleichzeitig verkürzend. Ihre Endpunkte liegen auf einer Geraden durch $x = 0$, die der zweiten Dreiecksseite des Ursprungsdreiecks parallel ist, und auf einer Geraden durch l, die der ersten Dreiecksseite parallel ist. Zur Zeit $t = l : \alpha$ ist die Gestalt ein Dreieck, das zum Ursprungsdreieck antisymmetrisch unterhalb der Gleichgewichtslage liegt. Von da ab kehrt sich das Spiel um. Es ist zu dieser Zeit

für	$0 \leqq x \leqq s - c,$	$s - c \leqq x \leqq 2l - c - s,$	$x \leqq l,$
η'	$= 0,$	$= -\lambda,$	$= 0.$

Die lebendige Kraft der Saite in den drei Epochen ist

$$F(t) = \tfrac{1}{2}\lambda^2 \varrho\, \omega\, 2\alpha t, \qquad 0 \leqq \alpha t \leqq l - c,$$

$$F(t) = \tfrac{1}{2}\lambda^2 \varrho\, \omega\, 2(l-c), \qquad l - c \leqq \alpha t \leqq c.$$

$$F(t) = \tfrac{1}{2}\lambda^2 \varrho\, \omega\, (2l - 2\alpha t), \qquad c \leqq \alpha t \leqq l.$$

Die mittlere Energie E ist

$$(\alpha : l) \int_0^{l:\alpha} F(t)\, dt.$$

Dies gibt

$$E = \frac{\lambda^2 \varrho\, \omega\, (l-c)}{2l}(l - c + 2(2c - l) + 2l - l - c) = \frac{\lambda^2 M c (l-c)}{l^2} = \frac{M h^2 \alpha^2}{4c(l-c)},$$

also dasselbe als vorhin. — Nennt man stehende Wellen solche, bei denen die sämtlichen Punkte der Saite gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage gehen, so kommen bei der gezupften Saite stehende Wellen nur dann zustande, wenn sie in der Mitte gezupft wird. Alsdann ist die mittlere Polygonseite der Gestalt der Gleichgewichtslage fortwährend parallel.

110) Die geschlagene Saite. Die zwischen 0 und l befestigte Saite werde zur Zeit $t = 0$ mit einem harten Hammer, dessen Schlagfläche von $x = a$ bis $x = b$ reicht, geschlagen. So ist

$$\mathfrak{F}(x) = 0, \quad \mathfrak{G}(-x) = -\mathfrak{G}(x), \quad \mathfrak{G}(x + 2l) = \mathfrak{G}(x)$$

zu setzen und es ist

für	$\mathfrak{G}(x) = 0,$	$\mathfrak{G}(x) = c,$	$\mathfrak{G}(x) = 0$
	$0 \leqq x < a,$	$a \leqq x \leqq b,$	$b < x \leqq l.$

Daraus folgt

$$b_n = 0, \quad a_n = -\frac{2}{n\pi\alpha} \int_0^l \mathfrak{G}(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi.$$

Nun ist

$$\int_0^l \mathfrak{G}(\xi)\, sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi = c\int_a^b sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi = \frac{lc}{n\pi}\left(cos\frac{n\pi b}{l} - cos\frac{n\pi a}{l}\right)$$

$$= -\frac{2cl}{n\pi}\, sin\frac{a+b}{2}\frac{n\pi}{l}\, sin\frac{b-a}{2}\frac{n\pi}{l},$$

woraus folgt

$$\eta = \frac{4cl}{\alpha\pi^2}\sum_{(m)}\frac{1}{m^2}\, sin\frac{a+b}{2}\frac{m\pi}{l}\, sin\frac{b-a}{2}\frac{m\pi}{l}\, sin\frac{m\pi x}{l}\, sin\frac{m\pi\alpha t}{l}.$$

Alle Punkte der Saite gehen hier gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage, man hat es also mit stehenden Wellen zu tun. Zur Zeit $T - t$, $T = 2l : \alpha$ ist die Gestalt der Saite die in bezug auf die x-Achse umgekehrte als zur Zeit t, man braucht deshalb die Bewegung nur in der Zeit $\frac{1}{2}T$ zu studieren. Zu diesem Studium wird man weniger bequem von der Reihe, als von ihrer Summe ausgehen

$$\eta = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{x+\alpha t}\mathfrak{G}(\xi)\, d\xi - \frac{1}{2\alpha}\int_0^{x-\alpha t}\mathfrak{G}(\xi)\, d\xi = \eta_l + \eta_r.$$

Man erkennt leicht, daß auch hier die Saite fortwährend geradlinige Polygone bildet. Will man die Stärke der Obertöne schätzen, so bilde man

$$\eta' = \frac{4c}{\pi}\sum_{(m)}\frac{1}{m}\, sin\frac{a+b}{2}\frac{m\pi}{l}\, sin\frac{b-a}{2}\frac{m\pi}{l}\, sin\frac{m\pi x}{2}\, cos\frac{m\pi\alpha t}{l}.$$

Für die physikalische Untersuchung genügt es, eine endliche Anzahl, etwa N Glieder, zu betrachten. Nehmen wir mit Helmholtz an, daß $b - a$ im Verhältnis zur Länge der Saite sehr klein sei, setzen

$$(b-a)c = c', \quad \frac{1}{2}(b+a) = a',$$

so können wir, wenn N nicht sehr groß ist, schreiben

$$\eta = \frac{2c'}{\alpha\pi}\sum_{m=1}^{m=N}\frac{1}{m}\, sin\frac{a'm\pi}{l}\, sin\frac{m\pi x}{l}\, sin\frac{m\pi\alpha t}{l}.$$

Die mittlere lebendige Kraft des n^{ten} Partialtones ist alsdann

$$\frac{c'c'M}{2l^2}\, sin^2\frac{a'n\pi}{l}.$$

Die Obertöne treten im allgemeinen verhältnismäßig stark hervor, viel stärker als bei der gezupften Saite, was dem alten Klavier mit eisernen Hämmern den klimprigen Ton verlieh. Es fallen jedoch alle

Obertöne aus, die an der geschlagenen Stelle a' einen Knotenpunkt haben, z. B. für $a' = \frac{1}{2} l$ fällt der erste Oberton, die Oktave, aus.

111) Die longitudinalen Schwingungen einer Saite hängen von derselben Differentialgleichung ab als die transversalen, aber es hat dann α eine andere Bedeutung, es hängt α vom Elastizitätskoeffizienten des Stoffes ab und ist viel größer. Deshalb sind diese Schwingungen viel schnellere, die zugehörigen Töne viel höhere. Man erzeugt sie, indem man die Saite mit sehr rauhem Bogen sehr schräg anstreicht. Diese Töne werden musikalisch nicht verwertet.

Die Flageolettöne entstehen, wenn man die Saite an einer Stelle nicht zwischen c und l durch aufgedrückten Finger fest macht, sondern nur berührt. Dann kommen nur die Töne zustande, die an der Berührungsstelle einen Knotenpunkt haben.

---

112) Bemerkung zur gliedweisen Differentiation der Fourierschen Reihe. Kronecker bespricht in seinen Vorlesungen über bestimmte Integrale auf S. 99 die gliedweise Differentiation. Er gibt (mit geringer Änderung der Bezeichnung) folgendes Raisonement. — Wir entwickeln die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ in die Fouriersche Reihe. Diese wird

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\xi)\, d\xi + \sum_{(\mu)} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\xi)\cos\mu(x-\xi)\, d\xi,$$

und durch Anwendung der partiellen Integration

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\pi}(f(\pi)-f(-\pi)) + \frac{1}{\pi}\sum\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\mu \sin\mu(\xi-x)\, d\xi \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\sum (f(\pi)-f(-\pi))(-1)^{\mu}\cos\mu x \\ &= \frac{1}{\pi}\sum \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos\mu(x-\xi)\, d\xi + (f(\pi)-f(-\pi))\, u, \end{aligned}$$

worin u eine unbestimmte Zahl ist. Wir haben daher den Satz: „Dann und nur dann, wenn die Funktion $f(x)$ an den Gültigkeitsgrenzen $-\pi$, π der für sie bestehenden Fourierschen Reihe denselben Wert hat, wird ihre Ableitung durch diejenige Reihe dargestellt, welche bei gliedweiser Differentiation der ersten Reihe entsteht. Dabei ist zugleich vorausgesetzt, daß die Funktion überhaupt eine Ableitung besitzt."

Die letzte Bedingung Kroneckers läßt sich etwas modifizieren. Die Schlußfolgerungen bleiben nämlich im allgemeinen dieselben, wenn man annimmt, $f'(x)$ sei der *vorwärts*genommene Differentialquotient von $f(x)$, der als überall vorhanden angenommen wird. Die Reihe für $f'(x)$ ist aber nicht überall gleich $f'(x)$. Vielmehr ist sie, wenn $f'(x)$ unstetig ist, gleich $\frac{1}{2}f'(x+0)+\frac{1}{2}f'(x-0)$. Das letzte Glied ist aber der rückwärtsgenommene Differentialquotient, der vom vorwärtsgenommenen verschieden sein kann, so daß dort ein Differentialquotient schlechthin nicht zu existieren braucht. An solchen Stellen stellt die gliedweise differenzierte Reihe den Mittelwert zwischen dem vorwärts- und rückwärtsgenommenen Differentialquotienten dar.

Über die allgemeine trigonometrische Reihe

$$S(x)=\tfrac{1}{2}a_0+\sum a_\mu \cos \mu x+\sum b_\mu \sin \mu x,$$

bei der die Bedingung $S(-\pi)=S(+\pi)$ immer von selbst erfüllt ist, sagt der Kroneckersche Satz nichts aus. Er verlangt, daß man die die Summe der Reihe darstellende Funktion kenne, und daß diese Funktion die vorerwähnten Eigenschaften besitze. Nennt man eine Reihe von der Form $S(x)$ eine *trigonometrische* Reihe und nur den speziellen Fall derselben, in dem die Koeffizienten die bekannten Integrale sind, eine Fouriersche Reihe, so gilt der Kroneckersche Satz nur für die Fourierschen Reihen.

Da Kronecker das Bolzanosche Schlußverfahren nicht für bindend hält, so erklärt er auch die Frage nach der Einheitlichkeit der Fourierschen Entwickelung noch für eine offene.

113) Das Poissonsche Grenzintegral. Ist $r<1$, so ist

$$R(x)=1-2r\cos 2x+r^2=(1-r\cos 2x)^2+r^2\sin^2 2x$$

für jedes x positiv. Wird $0<b<c<\pi$ angenommen, und ist $f(x)$ in diesem Intervalle endlich und integrabel, so ist

$$\lim_{r=1}\int_b^c \frac{(1-r^2)f(x)}{R(x)}\,dx=0.$$

Denn der Nenner bleibt im Integrationsintervalle über einer bestimmten Zahl, während der Faktor $1-r^2$ gegen Null konvergiert. Dies gilt auch für $f(x)=1$, und es ist deshalb

$$\lim_{r=1}\int_0^c \frac{1-r^2}{R(x)}\,dx=\lim_{r=1}\int_0^b \frac{1-r^2}{R(x)}\,dx,$$

wo wir b beliebig klein annehmen, insbesondere kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ annehmen dürfen. In einem solchen Intervalle $0 \cdots b$ ist

$$arctg\left(\frac{1+r}{1-r}\,tg\,x\right)$$

diejenige stetige Funktion, deren Ableitung $(1-r^2) : R(x)$ ist, daraus fließt

$$\lim_{r=1} \int_0^c \frac{1-r^2}{R(x)}\,dx = \lim_{r=1} \int_0^b \frac{1-r^2}{R(x)}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ferner ist auch

$$\lim_{r=1} \int_0^c \frac{(1-r^2)\,f(x)}{R(x)}\,dx = \lim_{r=1} \int_0^b \frac{(1-r^2)\,f(x)}{R(x)}\,dx,$$

worin man b so klein annehmen darf, als man will. Weiter ergibt sich

$$\lim_{r=1} \int_0^c \frac{(1-r^2)\,f(x)}{R(x)}\,dx = \lim_{r=1} f(+0) \int_0^b \frac{1-r^2}{R(x)}\,dx = \lim_{r=1} \int_0^b \frac{(1-r^2)\,(f(x)-f(+0))}{R(x)}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2} f(+0) + \lim_{r=0} \mathfrak{M} \int_0^b \frac{1-r^2}{R(x)}\,dx = \frac{\pi}{2} f(+0) + \frac{\pi}{2}\mathfrak{M},$$

wo $\mathfrak{M}$ ein Mittelwert der Funktion $f(x) + f(+0)$ im Intervall $0 \cdots b$ ist. Wir haben stillschweigend vorausgesetzt, daß $f(+0)$ existiere. Deshalb können wir b so klein annehmen, daß $\mathfrak{M}$ beliebig klein wird, und da die gewonnene Gleichung für jedes noch so kleine b gilt, so gewinnen wir den Poissonschen Satz: Es ist

$$\lim_{r=1} \int_0^c \frac{(1-r^2)\,f(x)}{1-2r\cos 2x + r^2}\,dx = \frac{\pi}{2} f(+0),$$

wenn $0 < c < \pi$ und $f(x)$ endlich und integrabel ist.

Zusatz zu 66). Mit denselben Mitteln wie das unter 66) behandelte Integral, läßt sich auch das Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a_1 x}\cos b_1 x - e^{-a_2 x}\cos b_2 x}{x}\,dx,$$

in dem a_1, a_2 positive Größen sind, auswerten. — Wir setzen

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-(y+a_1)x}\cos b_1 x - e^{-(y+a_2)x}\cos b_2 x}{x}\,dx,$$

dann ist mit 58)

$$\frac{dF}{dy} = \int_0^\infty e^{-(y+a_2)x} \cos b_2 x \, dx - \int_0^\infty e^{-(y+a_1)x} \cos b_1 x \, dx$$
$$= \frac{y+a_2}{(y+a_2)^2+b_2^2} - \frac{y+a_1}{(y+a_1)^2+b_1^2}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{d \lg (y+a_2)^2+b_2^2}{dy} - \frac{1}{2} \frac{d \lg (y+a_1)^2+b_1^2}{dy}.$$

Da $F(y)$ für $y = \infty$ verschwindet, so folgt

$$F(y) = \frac{1}{2} \lg \frac{(y+a_2)^2+b_2^2}{(y+a_1)^2+b_1^2}.$$

Setzen wir $y = 0$, so ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a_1 x} \cos b_1 x - e^{-a_2 x} \cos b_2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \lg \frac{a_2^2+b_2^2}{a_1^2+b_1^2}.$$

Ist $a_1 = a_2 = a$, (a positiv), so kann man, a als Veränderliche ansehend, durch Anwendung derselben Methode zu der Gleichung gelangen

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} (\cos b_1 x - \cos b_2 x)}{x^2} dx$$
$$= \frac{a}{2} \lg \frac{a^2+b_1^2}{a^2+b_2^2} + b_1 \operatorname{arctg} \frac{a}{b_1} - b_2 \operatorname{arctg} \frac{a}{b_2} + (b_2 - b_1) \frac{\pi}{2}.$$

Ersetzt man

$\cos b_1 x$ durch $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} b_1 x$; $\cos b_2 x$ durch $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} b_2 x$,

so nimmt das Integral die Gestalt an

$$2 \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \left(\sin^2 \frac{1}{2} b_2 x - \sin^2 \frac{1}{2} b_1 x \right)}{x^2} dx.$$

Nimmt man nun noch $b_1 = 0$, $b_2 = 2b$ an, so gewinnt man die Formel

$$2 \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin^2 bx}{x^2} dx = \frac{a}{2} \lg \frac{a^2}{a^2+4b^2} - 2b \operatorname{arctg} \frac{a}{2b} + b\pi.$$

Doppelintegrale.

Obschon die Theorie und die Auswertung interessanter einfacher Integrale keineswegs erschöpft ist, so schalten wir doch hier eine, wenn auch beschränkte, Untersuchung der Doppelintegrale ein, weil einerseits diese Theorie vielfach Mittel liefert, in eleganter Weise die Werte einfacher Integrale zu ermitteln, andererseits selbständiges Interesse beansprucht.

Man könnte nach stetigen Funktionen fragen, deren zweiter nach x und y genommener Differentialquotient in einem Gebiete gleich einer gegebenen Funktion $f(x, y)$ wäre. Eine solche Funktion kann offenbar nur bis auf einen additiven Ausdruck von der Form $\varphi(x) + \psi(y)$ bestimmt sein. Wir wollen jedoch von der Untersuchung der Doppelintegrale unter diesem Gesichtspunkte absehen, diese vielmehr, wie üblich, sogleich als den Grenzwert einer Summe auffassen.

Es sind im Grunde zwei Arten von Doppelintegralen zu unterscheiden. Die eigentlichen Doppelintegrale, und die, die als eine Aufeinanderfolge von zwei einfachen Integrationen anzusehen sind. Die Untersuchung der letzteren zielt vielfach dahin ab, festzustellen, wann die Integrationsfolge vertauscht werden kann und wann sie als eigentliche Doppelintegrale aufgefaßt werden dürfen. Die Zurückführung eines eigentlichen Doppelintegrales auf aufeinanderfolgende Integrationen ist im allgemeinen einfach, die umgekehrte Aufgabe, aufeinanderfolgende Integrationen auf eigentliche Doppelintegrale zurückzuführen, ist nicht immer ausführbar.

Was den Ausdruck angeht, so unterscheidet man beide Arten von Integralen nicht eben streng. Man spricht zum Beispiel vom Fourierschen Doppelintegral, obgleich gerade dieses eine Aufeinanderfolge von Integrationen bedeutet.

Die hierbei auftretenden Fragen sind so mannigfacher Art, daß wir sie hier nicht in derselben Allgemeinheit wie bei den einfachen Integralen erledigen können. Wir müssen uns vielmehr oft darauf beschränken, an Beispielen die Untersuchungsmethoden zu illustrieren.

Da ich hier auf graphische Grundlage nicht verzichten kann und mich einer aus der graphischen Darstellung fließenden Terminologie bediene, so ist es nötig (vgl. § 13), einige Bemerkungen darüber voraus-

zuschicken. Es handelt sich dabei besonders um den Begriff „Gebiet". Die Größen x, y werden als rechtwinklige Koordinaten einer Ebene aufgefaßt.

Liegt x zwischen a und b, y zwischen c und d, so sind x, y auf ein Gebiet beschränkt, das graphisch durch ein Rechteck dargestellt wird, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind. Dies Gebiet könnte, als am häufigsten vorkommend, als ein Normalgebiet bezeichnet werden. Die Bedingungen

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leqq k^2, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1 \leqq 0,$$

bestimmen rein arithmetisch Gebiete, die graphisch durch einen Kreis, bzw. eine Ellipse dargestellt werden. Es ergibt sich aber bei den Doppelintegralen häufig das Bedürfnis, von solchen und ähnlichen Gebieten allgemeiner zu reden, und man wendet sich zu diesem Zwecke an die graphische Darstellung, an die Intuition. Man scheidet aus der Ebene durch einen oder auch mehrere geschlossene Züge ein Stück aus, gelegentlich auch mehrere Stücke, und nennt den so begrenzten und bestimmten Ebenenteil ein „Gebiet". Hierdurch wird manchen Sätzen ein allgemeiner Ausdruck verliehen, der, ohne gewisse Einschränkungen zu machen, nicht ganz unbedenklich ist. Wäre die Umgrenzung eines Gebietes eine solche, die wie die Weierstraßsche Kurve nirgend eine Tangente hat, obschon sie kontinuierlich verläuft, oder wäre eine solche Kurve ein Teil der Begrenzung, so wäre es fraglich, ob man von einem Flächeninhalte eines solchen Gebietes reden könnte, jedenfalls stünde die Maßbestimmung desselben in Frage. Von einer Länge dieser Kurve könnte man auch nicht reden. In den Anwendungen, die wir hier machen, wird ein Gebiet entweder von einfachen Kurven oder Kurvenstücken begrenzt sein, die wie ein geschlossenes Polygon nur eine endliche Anzahl Ecken oder singuläre Punkte, in denen keine Tangente vorhanden ist, haben. Ein Kreis- oder Ellipsensegment, ein Sektor, ein Ellipsenring sind Beispiele. Auf solche Ebenenteile ist das Wort „Gebiet" zu beschränken. Wird ein Gebiet T in Teilgebiete zerlegt, so gilt auch für die Begrenzung der Teilgebiete das Gesagte, insbesondere müssen wir voraussetzen, daß sie einen Flächeninhalt besitzen.

Diese Bemerkungen sind nötig, damit man nicht manchen Sätzen ihrer Aussprache wegen eine größere Allgemeinheit zuschreibt, als ihnen zukommt.

114) Definition des Doppelintegrales. Wir zerlegen ein Gebiet T der xy-Ebene, das aus einem oder mehreren Stücken bestehen, auch mehrfach zusammenhängend sein kann, in n kleine Teile $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \cdots \tau_n$, die der Bedingung unterworfen sind, ganz mit einem Quadrate von dem Inhalt δ^2

umgeben werden zu können, wo δ eine kleine Zahl ist. Die in T gegebene Funktion zweier Veränderlichen $f(x, y)$ habe (vgl. § 5) im Gebiete τ_μ die obere Grenze G_μ und die untere Grenze g_μ; und ξ_μ sei ein echter Bruch, 0 und 1 eingeschlossen. Alsdann bilden wir die über alle μ von 1 bis n zu erstreckende Summe

$$\sum \tau_\mu (g_\mu + \xi_\mu [G_\mu - g_\mu]).$$

Nähert sich diese Summe einem bestimmten Grenzwerte, wenn δ der Grenze Null zugeführt wird, n also über alle Grenzen wächst, so nennt man diesen Grenzwert das über das Gebiet T erstreckte Integral von $f(x, y)$ und schreibt dafür

$$\int_{(T)} f(x, y)\, dT \quad \text{oder} \quad \int f(x, y)\, dT,$$

wo (T) das Integrationsgebiet andeutet, und fortgelassen werden kann, wenn das Gebiet sonst deutlich gekennzeichnet ist.

Ist $f(x, y)$ stetig, so kann bei gegebenen ξ_μ

$$g_\mu + \xi_\mu (G_\mu - g_\mu) = f(x'_\mu, y'_\mu)$$

gesetzt werden, wenn $x'_\mu y'_\mu$ ein Zahlenpaar bedeutet, dessen graphische Darstellung in das Gebiet τ_μ fällt.

Umgekehrt ist selbst bei unstetigen Funktionen $f(x'_\mu, y'_\mu)$ in der Form der linken Seite stets enthalten.

Der Grenzwert unserer Summe, also das Integral, ist vorhanden, wenn die *kritische* Summe

$$\sum \tau_\mu (G_\mu - g_\mu)$$

für beliebig abnehmende τ (oder δ) der Grenze Null zustrebt.

115) Die kritische Summe ist Null, das über T erstreckte Integral

$$\int f(x, y)\, dT$$

hat einen Sinn, einen bestimmten Wert [$f(x, y)$ immer als endlich vorausgesetzt]:

Erstens: Wenn $f(x, y)$ in T stetig ist, dann wird die größte Schwankung mit den τ unendlich klein.

Zweitens: Wenn $f(x, y)$ nur in einzelnen Punkten und Linien unstetig wird.

Drittens: Wenn $f(x, y)$ zwar unendlich oft unstetig wird, wenn aber die Summe der Flächenelemente τ, in denen $G_\mu - g_\mu > \sigma$ ist, wie klein auch σ sein mag, dem Flächeninhalte nach dadurch beliebig klein gemacht werden kann, daß man die τ klein genug nimmt.

Der Beweis dieser Sätze ist dem der entsprechenden Sätze für einfache Integrale ganz analog (vgl. 30), 31)). Wir können uns deshalb hier kürzer fassen.

Wir zerlegen zunächst das Gebiet T durch eine Teilung $(\tau^{(1)})$, deren Elemente $\tau_1^{(1)}, \tau_2^{(1)}, \cdots, \tau_n^{(1)}$ dem Flächeninhalte nach kleiner als $\delta^{(1)} \cdot \delta^{(1)}$ sind. Eine folgende Teilung entstehe aus dieser dadurch, daß man jeden Flächenteil $\tau_\mu^{(1)}$ weiter teilt. Die erhaltenen Teile seien $\tau_1^{(2)} \tau_2^{(2)} \cdots \tau_\nu^{(2)}$, und diese seien ihrem Flächeninhalte nach kleiner als $\delta^{(2)} \cdot \delta^{(2)}$. Dieses Verfahren setzt man fort, wodurch man Teilungen $(\tau^{(1)}), (\tau^{(2)}), \cdots, (\tau^{(\mu)}), \cdots$ erhält Die Teilflächen der Teilung (τ^μ) sollen sich sämtlich durch Quadrate umgeben lassen, deren Inhalt kleiner als $\delta^{(\mu)} \cdot \delta^{(\mu)}$ ist. Dazu kommt die Voraussetzung, daß die Zahlen $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \cdots, \delta^{(\mu)}, \cdots$ eine monoton gegen Null konvergierende Folge bilden. Die obere Grenze der Funktion $f(x, y)$ im Gebiete $\tau_\nu^{(\mu)}$ sei $G_\nu^{(\mu)}$, die untere $g_\nu^{(\mu)}$. Dann bilden die Zahlen

$$A_1 = \sum_{(\nu)} \tau_\nu^{(1)} G_\nu^{(1)}, \quad A_2 = \sum_{(\nu)} \tau_\nu^{(2)} G_2^{(\nu)}, \quad A_3 = \sum_{(\nu)} \tau_\nu^{(3)} G_3^{(\nu)}, \cdots,$$

in denen die Summe über alle Teilstücke $\tau_\nu^{(\mu)}$ zu erstrecken ist, eine monoton abnehmende Folge, deren Terme sämtlich die Ungleichung befriedigen

$$T \cdot g < A_\mu < T \cdot G,$$

wenn g, G die unteren und oberen Grenzen von f in T sind. Die Zahlen $A_1, A_2, \cdots$ nähern sich deshalb nach 11) einer bestimmten Zahl A.

Bilden wir weiter, unter $g_\nu^{(\mu)}$ die untere Grenze von f im Gebiete $\tau_\nu^{(\mu)}$ verstehend, die Zahlenfolge

$$B_1 = \sum_{(\nu)} \tau_\nu^{(1)} g_\nu^{(1)}, \quad B_2 = \sum_{(\nu)} \tau_\nu^{(2)} g_\nu^{(2)}, \quad B_3 = \sum_{(\nu)} \tau_\nu^{(3)} g_\nu^{(3)}, \cdots,$$

so bilden sie eine monoton zunehmende, unter $T \cdot G$ bleibende Folge und nähern sich deshalb einer bestimmten Zahl B.

Ist nun für abnehmende τ

$$lim \sum \tau_\nu (G_\nu - g_\nu) = 0,$$

so ist

$$lim\,(A_\mu - B_\mu) = lim \sum_{(\nu)} \tau_\nu^{(\mu)} (G_\nu^{(\mu)} - g_\nu^{(\mu)}) = 0, \quad A = B,$$

und nach 18)

$$lim \sum_{(\nu)} \tau_\nu (g_\nu + \xi_\nu (G_\nu - g_\nu)) = lim \sum_{(\nu)} \tau_\nu g_\nu + lim\, \xi \sum_{(\nu)} \tau_\nu (G_\nu - g_\nu) = B = A.$$

Der Grenzwert ist eine *bestimmte* Zahl, die der Wert des Integrales $\int f dT$ heißt.

Damit aber das Integral einen völlig bestimmten Sinn habe, muß noch bewiesen werden, daß unsere Summe bei *jeder* Art der Teilung sich demselben Grenzwerte A nähert, wenn nur die τ beliebig klein werden, gleichviel ob die folgende Teilung eine fortgesetzte der voraufgehenden ist oder nicht. Die Prinzipien, die dabei maßgebend sind, sind dieselben, als die unter 30) angewandten bei einfachen Integralen. Deshalb begnüge ich mich hier, auf jenen Beweis zu verweisen.

Wann ist nun die kritische Summe Null? Wir zerlegen die Summe

$$\Sigma(G_\nu - g_\nu)\tau_\nu$$

in zwei Teile

$$\Sigma(G_\nu - g_\nu)\tau_\nu = \Sigma'(G_\nu - g_\nu)\tau_\nu + \Sigma''(G_\nu - g_\nu)\tau_\nu.$$

Der erste Teil Σ' enthalte diejenigen Teilelemente τ, in denen die größte Schwankung kleiner als σ, der zweite Σ'' diejenigen Elemente, in denen die größte Schwankung $>$ als σ ist. Stets ist die größte Schwankung $\leqq G - g$. Der erste Teil ist nach 18) kleiner als $\sigma \cdot T$, also beliebig klein, wenn man σ klein genug annimmt. Der zweite Teil aber kann nach der in 115) unter „Drittens" aufgestellten Bedingung beliebig klein gemacht werden. Da unter diesem Falle die Fälle „Erstens" und „Zweitens" als spezielle enthalten sind, so sind damit die Sätze unter 115) erwiesen, weil eben in diesen Fällen der Grenzwert der kritischen Summe Null ist.

116) Mittelwertsatz. Hat die Funktion $\varphi(x,y)$ im Gebiete T überall dasselbe Vorzeichen, so ist

$$\int f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dT = (g + \xi[G-g])\int \varphi(x,y)\,dT,$$

wenn g die untere, G die obere Grenze von $f(x,y)$ in T ist. Dabei muß natürlich $\varphi(x,y)$ und $f(x,y)\,\varphi(x,y)$ in T integrabel sein, d. h. die Bedingungen der vorigen Nummer befriedigen.

Es ist nämlich nach 18), wenn, was die Allgemeinheit offenbar nicht beschränkt, φ positiv ist,

$$\int g\,\varphi(x,y)\,dT < \int f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dT < \int G\,\varphi(x,y)\,dT,$$

woraus der Satz unmittelbar folgt.

117) Zurückführung des Doppelintegrales auf nacheinanderfolgende Integrationen. Ein vielfach brauchbares Mittel zur Auswertung von Doppelintegralen ist die Zurückführung derselben auf zwei aufeinanderfolgende Integrationen.

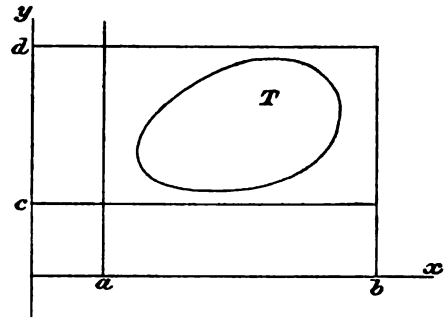
Um das Integrationsgebiet T werde ein Rechteck R beschrieben, in dem $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ ist. Wird dann $f(x,y)$ als eine in T integrable Funktion, außerhalb T aber gleich Null angenommen, so ist das Integral

$$\int f(x,y)\,dT$$

über T erstreckt gleich demselben Integrale über R erstreckt. Das Rechteck zerlegen wir in kleine Rechtecke,

$$x_\mu \leqq x \leqq x_{\mu+1}, \quad y_\nu \leqq y \leqq y_{\nu+1}.$$

Das Integral ist dann der Grenzwert



$$lim \sum_\mu \sum_\nu (x_{\mu+1} - x_\mu)(y_{\nu+1} - y_\nu) f(x_\mu, y_\nu),$$

wo sich das Limeszeichen auf die Abnahme der kleinen Rechtecke bezieht. Da $f(x,y)$ integrabel sein soll, so kann man für die f der Summe beliebige Werte der Funktion in den Teilrechtecken wählen, also auch, wie hier geschehen, die Werte in einer Ecke. Nun kann man die Teilrechtecke in beliebiger Weise zu Null abnehmen lassen. Macht man zuerst die $y_{\nu+1} - y_\nu$ beliebig klein, dann die $x_{\mu+1} - x_\mu$, so folgt

$$\int f(x,y)\,dT = lim \sum_\mu (x_{\mu+1} - x_\mu) \int_c^d f(x_\mu, y)\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Läßt man zuerst die $x_{\mu+1} - x_\mu$ gegen Null konvergieren, dann die $y_{\nu+1} - y_\nu$, so ergibt sich

$$\int f(x,y)\,dT = lim \sum_\nu (y_{\nu+1} - y_\nu) \int_a^b f(x, y_\nu)\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy,$$

woraus zugleich folgt, *daß man die Integrationsreihenfolge vertauschen darf*.

Nehmen wir an, daß jede Parallele zur x-Achse und jede Parallele zur y-Achse in das Gebiet T nur *einmal* eintrete und einmal austrete, und zwar, daß die zur y-Achse Parallele mit der Abszisse x bei $y = \varphi(x)$ ein-, bei $y = \psi(x)$ austrete, so ist, weil f außerhalb T den Wert Null hat,

$$\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

eine Funktion von x, und wir erhalten

$$\int f(x,y)\,dT = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

und in ähnlicher Weise

$$\int f(x,y)\,dT = \int_c^d \int_{\omega(y)}^{\chi(y)} f(x,y)\,dx\,dy,$$

wenn die zur Ordinate y gehörende Parallele bei $\omega(y)$ in T ein-, bei $\chi(y)$ aus T heraustritt. Die Funktionen φ, ψ, ω, χ setzen wir als stetige voraus.

Treten die Parallelen mehrere Male in T ein und aus, so kann man das Gebiet T in solche Stücke zerlegen $T_1 + T_2 + \cdots + T_n$, für die die Parallelen nur einmal ein- und austreten und dann die Terme der Summe

$$\int_{(T)} f(x,y)\,dT = \int_{(T_1)} f\,dT + \int_{(T_2)} f\,dT + \cdots + \int_{(T_n)} f\,dT$$

in obiger Weise auf aufeinanderfolgende Integrationen zurückführen.

118) Polarkoordinaten. Die Teilung des Gebietes T in abnehmende Rechtecke τ ist die nächstliegende. Häufig genug nimmt man aber auch andere Teilungen vor. Eine der wichtigsten ist die Teilung durch konzentrische Kreise und deren Radien.

Es sei $x - x_0 = r\cos t$, $y - y_0 = r\sin t$, dann ist das Flächenelement τ, das durch zwei benachbarte konzentrische Kreise und zwei benachbarte Radien bestimmt wird, die Größe

$$r\,dr\,dt + \tfrac{1}{2}\,dr\,dr\,dt = r\,dr\,dt\left(1 + \frac{dr}{2r}\right),$$

und es strebt $dr : 2r$ bei fortschreitender Teilung, wenn die benachbarten Kreise und die benachbarten Radien enger und enger genommen werden, der Grenze Null zu, wenn r nicht Null ist. Liegt $x_0 y_0$ im Innern oder am Rande von T, so legen wir um diesen Punkt herum als Mittelpunkt einen Kreis mit dem kleinen Radius ε und bezeichnen das durch ihn in T bestimmte Gebiet mit τ_0. Dann ist das über T erstreckte Integral gleich dem über $T - \tau_0$ erstreckten Integral, plus dem über τ_0 erstreckten. Das Integral über τ_0 strebt (Mittelwertsatz) mit abnehmenden ε der Grenze Null zu. Das über $T - \tau_0$ erstreckte Integral ist

$$\int f(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\,dT = \int\int f(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\,r\,dr\,dt.$$

Da aber das Element $r\,dr\,dt = dT$ mit abnehmenden r gegen Null konvergiert, so ist offenbar das über $T - \tau_0$ erstreckte Integral gleich dem über T erstreckten, wenn ε und also τ_0 zur Grenze Null übergeht.

Ist das Gebiet T von zwei konzentrischen Kreisen mit dem Mittelpunkte $x_0 y_0$ und von zwei Radien begrenzt, so wird das Doppelintegral durch diese Substitution — so kann man die Einführung von Polarkoordinaten nennen — auf ein solches mit konstanten Grenzen zurückgeführt.

Die Radien der beiden Grenzkreise seien r_1 und r_2, die Richtungen der Grenzradien t_1, t_2, so ergibt sich

$$\int f(x,y)\,dT = \int_{r_1}^{r_2}\int_{t_1}^{t_2} f(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\, r\,dt\,dr.$$

Zum Beweise führe man die Integration durch Summation zuerst über die Rechtecke eines einem konstanten r entsprechenden Streifens von der Breite dr aus, dann summiere man über diese Streifen.

Summiert man zuerst über einen Sektor von der Öffnung dt, und dann über alle Sektoren, so erhält man noch:

$$\int f(x,y)\,dT = \int_{t_1}^{t_2}\int_{r_1}^{r_2} f(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\, r\,dr\,dt,$$

was auch aus dem Satz von der einfachen Vertauschbarkeit der Integrationsfolge bei konstanten Grenzen folgt.

119) Doppelintegrale mit Unendlichkeitsstellen. Wir benutzen die Substitution in Polarkoordinaten, um zu beweisen, daß ein Doppelintegral einen unbedingten Sinn hat, wenn der Integrand in einzelnen Punkten — es genügt, den Nachweis für *eine* Stelle zu liefern — in einer niederen als der *zweiten* Ordnung unendlich groß wird.

Wir sagen, $f(x,y)$ werde im Punkte $x_0 y_0$ unendlich groß in der α^{ten} Ordnung, wenn $f(x,y)\,r^\alpha$, $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$, bei jeder Art der Annäherung von x, y an die Stelle x_0, y_0 im Gebiete T unterhalb einer endlichen Grenze bleibt.

Um in einem solchen Falle das Doppelintegral zu definieren, nehmen wir an, daß $T_1 T_2 T_3 \cdots T_n \cdots$ Umgebungen des Punktes $x_0 y_0$ seien, von denen jede voraufgehende die nachfolgende so einschließt, daß $lim\ T_n$ der Grenze Null zustrebt. Nähern sich nun die über

$$T - T_1,\ T - T_2,\ T - T_3,\ \cdots,\ T - T_n,\ \cdots$$

erstreckten Integrale einer bestimmten Grenze, unabhängig von der Gestalt der $T_1 T_2 \cdots$, so nennt man diese Grenze das über T erstreckte Integral.

Für die Existenz des Integrales ist es notwendig und hinreichend, daß für jedes ganze positive m das über $T_n - T_{n+m}$ erstreckte Integral dadurch beliebig klein gemacht werden kann, daß n groß genug genommen wird, denn in diesem Falle strebt das über $T - T_n$ erstreckte Integral nach arithmetischen Sätzen einer bestimmten Grenze zu.

Nun werde T_n durch den Kreis r_n von außen, T_{n+m} durch den Kreis r_{n+m} von innen berührt und es sei $G_{n,m}$ die obere Grenze von $\varphi(x,y) = abs\, f(x,y)\,r^\alpha$ zwischen diesen Kreisen. Weiter bezeichnen wir

das Gebiet zwischen $T_n T_{n+m}$ mit (n, m), so ist in leicht verständlicher Bezeichnung

$$\int_{(n,m)} f(x,y)\,dT \leqq \int \frac{\varphi(x,y)\,dT}{r^\alpha} < G_{n,m} \int_{(n,n_1)} \frac{dT}{r^\alpha} = G_{n,m} \int_{r_{n+m}}^{r_n} \int_0^{2\pi} \frac{r\,dr\,d\varphi}{r^\alpha}$$

$$= \frac{2\pi G_{n,m}}{2-\alpha} \left(r_n^{2-\alpha} - r_{n+m}^{2-\alpha} \right)$$

und dieser Ausdruck wird, weil $2-\alpha$ positiv ist, mit wachsenden n beliebig klein. Damit ist der ausgesprochene Satz erwiesen. — Liegt die Unendlichkeitsstelle am Rande, so braucht man nur, um die Schlußweise nicht modifizieren zu müssen, die Funktion f über den Rand hinaus mit dem Werte Null ein Stück fortzusetzen.

Unterscheiden sich $T_1' T_2' \cdots$ der Gestalt nach von $T_1 T_2 \cdots$, haben aber die Eigenschaft, daß $\lim T - T_n' = T$ wird, wenn n über alle Grenzen wächst, so kann man in T_n' n so groß annehmen, daß T_n' von T_ν ganz umschlossen wird. Die beiden Integrale über T_n' und T_ν unterscheiden sich deshalb, wenn ν groß genug genommen wird, beliebig wenig. Der Grenzwert ist von der Gestalt der $T_1, T_2, \cdots$ unabhängig.

Ist das Unendlichwerden von Logarithmen abhängig, oder wird f längs einer Linie unendlich groß, so wollen wir darüber hier keine allgemeinen Regeln angeben, sondern solche Fälle der Spezialuntersuchung überlassen.

120) Unendliche Gebiete T. Erstreckt sich das Gebiet T ins Unendliche, so schneiden wir davon Stücke $T_1, T_2, T_3, \cdots, T_n, \cdots$ so ab, daß jedes folgende das voraufgehende umfaßt, und daß $\lim T_n = T$ wird. Nähert sich die Reihe der über $T_1 T_2 \cdots T_n \cdots$ erstreckten Integrale einer bestimmten Grenze, so nennt man diesen Grenzwert das über T erstreckte Integral. Ist J_n das über T_n erstreckte Integral, so ist die Bedingung für das Vorhandensein des Integrales die, daß $J_{n+m} - J_n$ für jedes ganze positive m dadurch beliebig klein gemacht werden kann, daß n groß genug genommen wird.

Man beweist ganz analog dem Beweisgange des vorigen Paragraphen, daß dies der Fall ist, wenn

$$f(x,y)\, r^{2+\alpha}$$

für in T wachsende x, y für ein positives α endlich bleibt, oder wenn, wie man sagt, f in T im Unendlichen in einer (angebbar) höheren Ordnung als der zweiten verschwindet.

Ist das Gebiet ein Parallelstreifen, so genügt es, wenn f in einer höheren Ordnung als der ersten verschwindet.

121) Das Produkt zweier einfacher Integrale läßt sich als Doppelintegral auffassen. Es ist

$$\int_a^b f(x)\,dx \int_c^d \varphi(y)\,dy = \int_a^b \int_c^d [f(x)\,\varphi(y)]\,dy\,dx,$$

wie aus der Summendefinition ohne weiteres folgt. — Umgekehrt läßt sich ein Doppelintegral mit konstanten Grenzen, dessen Integrand in zwei Faktoren zerfällt, von denen der eine nur von x, der andere nur von y abhängt, in ein Produkt zweier einfacher Integrale zerlegen.

Dieser Satz läßt sich auch auf ein Integral anwenden,

$$\int f(x)\,\varphi(y)\,dT,$$

wenn es über das unendliche Gebiet T

$$a \leqq x \leqq \infty, \quad b \leqq y \leqq \infty$$

erstreckt wird, sofern das Integral unbedingt konvergent ist. Denn es ist

$$\int f(x)\,\varphi(y)\,dT = \lim_{\omega=\infty}\lim_{\omega'=\infty} \int_a^{\omega} f(x)\,dx \int_b^{\omega'} \varphi(y)\,dy = \int_a^{\infty} f(x)\,dx \int_b^{\infty} \varphi(y)\,dy.$$

Es ist dabei nötig, daß $f(x)$, $\varphi(y)$ für sich ins Unendliche integrabel sind.

122) Das Laplacesche Integral. Es sei T die unendliche Viertelebene zwischen der positiv reellen x-Achse und der positiv reellen y-Achse. Dann ist nach dem vorigen Paragraphen

$$\int e^{-x^2-y^2}\,dT = \int e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dT = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy.$$

Wollen wir nun, Polarkoordinaten einführend, $dT = r\,dr\,dt$ setzen, so ist zu beachten, daß die Zulässigkeit dieser Substitution doch nur für endliche Gebiete erwiesen ist. Es ist deshalb nötig, auf die Definition des Doppelintegrales für unendliche Gebiete zurückzugehen. Wir integrieren über das Quadrat $0 \leqq x \leqq \omega$, $0 \leqq y \leqq \omega$. Das Gebiet eines Viertelkreises um $x = 0$, $y = 0$ mit dem Radius ω, das wir mit (ω) bezeichnen wollen, liegt ganz im Innern des Quadrates. Der Viertelkreis $(\sqrt{2}\,\omega)$ mit dem Radius $\sqrt{2}\,\omega$ enthält das Quadrat im Innern. Da nun der Integrand positiv ist, so folgt

$$\int_{(\omega)} e^{-x^2-y^2}\,dT < \int_0^{\omega}\int_0^{\omega} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy < \int_{(\sqrt{2}\omega)} e^{-x^2-y^2}\,dT.$$

In den beiden äußeren Integralen können wir nun Polarkoordinaten einführen und erhalten dadurch die Ungleichungen

$$\int_0^{\omega}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-r^2} r\,dt\,dr < \int_0^{\omega} e^{-x^2}dx \cdot \int_0^{\omega} e^{-y^2}dy < \int_0^{\sqrt{2}\omega}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-r^2} r\,dt\,dr,$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\omega} e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{4}(1-e^{-\omega^2}) < \Big(\int_0^{\omega} e^{-x^2}dx\Big)^2 < \frac{\pi}{4}(1-e^{-2\omega^2}).$$

Die beiden äußeren Zahlen nähern sich für wachsende ω dem reellen Werte $\frac{1}{4}\pi$, die Ungleichungen gehen für $lim\ \omega = \infty$ in Gleichungen über, und man erhält

$$\Big(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\Big)^2 = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2}dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

wo die Wurzel offenbar positiv zu nehmen ist.

Das Laplacesche Integral spielt eine Rolle in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und wird deshalb auch das Wahrscheinlichkeitsintegral genannt.

123) Erweiterung des Laplaceschen Integrales. Machen wir im Laplaceschen Integrale die Substitution $\sqrt{a}x$ für x, $\sqrt{a}$ als positive reelle Zahl annehmend, so folgt

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Das noch mehr erweiterte Integral

$$u = \int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$$

ist positiv für reelle Werte von b. Man findet nämlich durch Differentiation und partielle Integration

$$\frac{du}{db} = -\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\sin bx\,x\,dx = -\frac{b}{2a}\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = -\frac{b}{2a}u,$$

und also

$$u = \frac{2a}{b}\int_0^{\infty} e^{-ax^2}x\sin bx\,dx = \frac{2}{b}\int_0^{\infty} e^{-x^2}x\sin\Big(\frac{b}{\sqrt{a}}x\Big)\,dx.$$

Die Funktion

$$x e^{-x^2} = x : \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{1 \cdot 2} + \cdots\right)$$

ist eine mit wachsenden x monoton abnehmende Funktion. Zerlegt man im letzten Integrale das Integrationsintervall in Teilintervalle

$$0 \ldots \frac{\sqrt{a}\pi}{b}, \quad \frac{\sqrt{a}\pi}{b} \ldots \frac{2\sqrt{a}\pi}{b}, \quad \frac{2\sqrt{a}\pi}{b} \ldots \frac{3\sqrt{a}\pi}{b}, \quad \ldots,$$

so erhält man eine Summe von Integralen, deren Werte fortwährend mit wechselnden Zeichen gegen Null abnehmen, und deren erstes positiv ist, ihre Summe ist deshalb positiv.

Wir können daher schreiben (vgl. § 20)

$$\frac{d \lg u}{db} = -\frac{b}{2a}, \quad \lg u = -\frac{b^2}{4a} + \lg C, \quad u = C e^{\frac{-b^2}{4a}}.$$

Für $b = 0$ ist $u = \frac{1}{2}\sqrt{(\pi : a)}$, woraus fließt $C = \frac{1}{2}\sqrt{(\pi : a)}$ und also

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{4a}}\, e^{\frac{-b^2}{4a}}.$$

124) In der Lehre von den bestimmten Integralen werden hergebrachterweise manche Integrale untersucht, ohne daß man aus der Systematik einen zwingenden Grund ersieht, warum man gerade auf diese Integrale verfällt. Sie sind gelegentlich von bedeutenden Forschern behandelt worden und haben so einen historischen Anspruch erhalten, in den Kreis der Betrachtungen gezogen zu werden, zumal sie die Methode gut illustrieren. Es folgen einige solche Beispiele, die auf Laplace zurückzuführen sind.

Unter 58) haben wir für positive p die Gleichungen gefunden:

$$\int_0^\infty e^{-px} \cos qx \, dx = \frac{p}{p^2 + q^2}, \quad \int_0^\infty e^{-px} \sin qx \, dx = \frac{q}{p^2 + q^2}.$$

Wir schreiben y für p, multiplizieren die erste dieser Gleichungen mit $\sin ky \, dy$ und integrieren dann über y zwischen ε und ∞, wo ε eine positive Zahl ist. So folgt durch Umkehrung der Integrationsreihenfolge

$$u = \int_\varepsilon^\infty \frac{y \sin ky \, dy}{q^2 + y^2} = \int_\varepsilon^\infty dy \sin ky \int_0^\infty e^{-yx} \cos qx \, dx$$

$$= \int_0^\infty dx \cos qx \int_\varepsilon^\infty e^{-yx} \sin ky \, dy.$$

Nun ist, wenn ξ einen echten positiven Bruch bedeutet,

$$\int_0^\infty e^{-yx} \sin ky\, dy = \int_0^\infty e^{-yx} \sin ky\, dy - \int_0^\varepsilon e^{-yx} \sin ky\, dy$$

$$= \frac{k}{x^2+k^2} - \varepsilon \sin \xi k\varepsilon e^{-\xi\varepsilon x},$$

so daß sich ergibt

$$u_\varepsilon = \int_0^\infty \frac{k \cos qx}{x^2+k^2}\, dx - \varepsilon \sin k\xi\varepsilon \int_0^\infty e^{-\xi\varepsilon x} \cos qx\, dx.$$

Der zweite Teil dieses Ausdruckes strebt mit abnehmenden ε der Grenze Null zu, so daß man für $lim\ \varepsilon = 0$ die Beziehung erhält

$$u = \int_0^\infty \frac{k \cos qx}{x^2+k^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{y \sin ky}{q^2+y^2}\, dy.$$

Aus der zweiten Form folgt, daß für reelle q und positive k u positiv ist. — Unter der Voraussetzung, daß q und k gleiche Vorzeichen haben, setzen wir $y = qx : k$ und erhalten so

$$\int_0^\infty \frac{k \cos qx\, dx}{k^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{q^2 x \sin qx\, dx}{k^2(q^2+(q^2x^2:k^2))} = \int_0^\infty \frac{x \sin qx\, dx}{k^2+x^2}.$$

125) Unter 69) haben wir bewiesen, daß

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \int_0^\infty \frac{k \cos qx\, dx}{k^2+x^2} = -h \int_0^\infty \frac{x \sin qx\, dx}{k^2+x^2}$$

sei. Es ist deshalb nach der letzten Gleichung der vorigen Nummer

$$\frac{\partial u}{\partial q} = -ku, \quad \frac{\partial lg\, u}{\partial q} = -k, \quad lg\, u = -ku + lg\, C, \quad u = Ce^{-kq}.$$

Um die Konstante zu bestimmen, bemerken wir, daß, wenn $k > 0$ ist,

$$u_{(q=0)} = \int_0^\infty \frac{k\, dx}{k^2+x^2} = arctg \frac{\infty}{k} - arctg\, 0 = \frac{1}{2}\pi$$

ist. Ist aber $k < 0$, so ist derselbe Ausdruck gleich $-\frac{1}{2}\pi$. Es folgt deshalb

$$\int_0^\infty \frac{k \cos qx\, dx}{k^2+x^2} = sgn\, k \cdot \frac{1}{2}\pi e^{-abs(qk)},$$

$$\int_0^\infty \frac{x \sin qx\, dx}{k^2+x^2} = sgn\, q \cdot \frac{1}{2}\pi e^{-abs(qk)},$$

wo $sgn\, z$ das Vorzeichen von z bedeutet.

Setzen wir jetzt k als positiv voraus, so folgt durch Addition

$$\int_0^\infty \frac{k\cos qx + x\sin qx}{k^2+x^2}\,dx = \begin{cases} \pi e^{-kq}, & q>0, \\ \frac{1}{2}\pi, & q=0, \\ 0, & q<0. \end{cases}$$

Nimmt man q als Abszisse, den Wert des Integrales als Ordinate, so stellt das Integral eine Kurve dar, die für negative Abszissen mit der Abszissenachse zusammenfällt, deren Ordinate für den Punkt $0\cdot\frac{1}{2}\pi$ ist, für positive Abszissen von dem asymptotisch größten Werte π an stetig abnimmt. Die Kurve nähert sich für wachsende Abszissen asymptotisch der Abszissenachse.

126) Eine andere Erweiterung des Laplaceschen Integrales. Ist $f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)$ eine zwischen 0 und ∞ integrable Funktion, so kann das Integral

$$\int_0^\infty f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)dx$$

durch die Substitution $x+(a^2:x)=t$ transformiert werden. Aus der Substitutionsgleichung folgt

$$x=\frac{1}{2}t\pm\frac{1}{2}\sqrt{t^2-4a^2},\quad dx=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{t^2-4a^2}}\right)dt.$$

Läuft t von ∞ bis $2a$ abnehmend, so läuft x, wenn wir die Wurzel negativ nehmen, wachsend von 0 bis a, von da an ist die Wurzel positiv zu nehmen, damit x, wenn t von $2a$ bis ins Unendliche positiv wächst, ebenfalls positiv ins Unendliche wachse. Es ist deshalb

$$\int_0^\infty f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)dx = \int_\infty^{2a} f(t)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{t^2-4a^2}}\right)dt$$

$$+\int_{2a}^\infty f(t)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{t^2-4a^2}}\right)dt,$$

und durch Umkehrung der Grenzen des ersten Integrales rechts

$$\int_0^\infty f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)dx = \int_{2a}^\infty f(t)\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-4a^2}}.$$

Substituieren wir weiter $t^2-4a^2=x^2$, $t\,dt=x\,dx$, so folgt

$$\int_0^\infty f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)dx = \int_0^\infty f(\sqrt{x^2+4a^2})\,dx.$$

Um hieraus eine Erweiterung des Laplaceschen Integrales zu erhalten, nehmen wir

$$f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)=e^{-\left(x+\frac{a^2}{x}\right)^2}$$

an. Dann ist

$$\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{a^2}{x}\right)^2}dx=e^{-2a^2}\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^4}{x^2}}dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-x^2-4a^2}dx=e^{-4a^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-4a^2}.$$

Also

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^4}{x^2}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-2a^2},\quad \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-2a},$$

wo a positiv zu nehmen ist. — Dieses Resultat haben wir auf anderem Wege schon unter 68) gefunden.

127) Noch eine Modifikation dieses Integrales. Obschon $e^{-x^2-\frac{ia^2}{x^2}}$ analytisch genommen bei $x=0$ eine wesentlich singuläre Stelle hat, so ist dieser Integrand doch von 0 bis ∞ integrabel, denn die Unstetigkeit des Integranden an der Stelle $x=0$ ist eine in endlichen Grenzen enthaltene Unbestimmtheit. Wollte man auf das von 0 bis ∞ erstreckte Integral dieser Funktion die Formel der vorigen Nummer anwenden, indem man einfach a^2 durch ia^2 darin ersetzte, so würde man zu einem richtigen Resultate gelangen. Allein der Tenor der gemachten Transformationen würde zu Unstimmigkeiten führen. Man muß deshalb, um die durch Trennung des Reellen und Imaginären hervorgehenden Integrale

$$u=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\frac{a^2}{x^2}dx,\quad v=\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\frac{a^2}{x^2}dx$$

auszuwerten, zu anderen Hilfsmitteln seine Zuflucht nehmen.*) — Man erhält unter Anwendung der Substitution $a:x$ für x nach der Differentiation die Gleichungen

*) Das sagt auch G. F. Meyer in seinen Vorlesungen über bestimmte Integrale (Leipzig 1871) auf Seite 321, bezieht sich aber im folgenden doch auf die unbewiesenen Formeln.

$$\frac{du}{da} = -\int_0^\infty e^{-x^2} \sin\frac{a^2}{x^2}\,\frac{2a\,dx}{x^2} = -2\int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{x^2}} \sin x^2\,dx,$$

$$\frac{d^2u}{da^2} = 4a\int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{x^2}} \sin x^2\,\frac{1}{x^2}\,dx = 4\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\frac{a^2}{x^2}\,dx = 4v.$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$\frac{d^2v}{da^2} = -4u,$$

und also

$$\frac{d^4u}{da^4} + 16u = 0, \quad \frac{d^4v}{da^4} + 16v = 0.$$

Es genügen u, v derselben homogenen linearen Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist bekanntlich

$$c_1 e^{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}2a} + c_2 e^{\frac{-1-i}{\sqrt{2}}2a} + c_3 e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}2a} + c_4 e^{\frac{1-i}{\sqrt{2}}2a}.$$

Unter diesen Lösungen müssen unsere Integrale enthalten sein. Da die Integrale für wachsende a endlich bleiben, so müssen in ihren Darstellungen durch die obige Form $c_3 c_4$ Null sein. Ist nun

$$u = c_1 e^{(-1+i)\sqrt{2}a} + c_2 e^{(-1-i)\sqrt{2}a},$$

so folgt aus der Beziehung $4v = d^2u : da^2$

$$v = -ic_1 e^{(-1+i)\sqrt{2}a} + ic_2 e^{(-1-i)\sqrt{2}a},$$

und es muß, weil v für $a = 0$ verschwindet, $c_2 = c_1$ sein.

Daraus fließt

$$u = 2c_1 e^{-\sqrt{2}a}\cos\sqrt{2}a, \quad v = 2c_1 e^{-\sqrt{2}a}\sin\sqrt{2}a.$$

Für $a = 0$ geht u in das Laplacesche (Haupt-) Integral über, wird gleich $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Es ist demnach $2c_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, und es ergibt sich

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos\frac{a^2}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\sqrt{2}a}\cos\sqrt{2}a,$$

$$v = \int_0^\infty e^{-x^2}\sin\frac{a^2}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\sqrt{2}a}\cos\sqrt{2}a,$$

128) Einfache Substitutionen. Ist ein Doppelintegral über ein Gebiet T zu erstrecken, so sucht man dasselbe oft nicht bloß auf zwei aufeinanderfolgende Integrationen zurückzuführen, sondern man erstrebt noch, diese Integrationen auf konstante Grenzen zu bringen, was in der

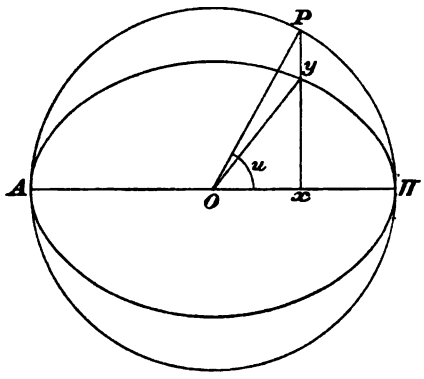
Regel eine Vereinfachung bedeutet. Es gelingt diese Zurückführung oft durch passende Wahl der Integrationselemente, der kleinen Gebietsteile τ in der definierenden Summe, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch Einführung neuer Variabeln durch eine Substitution, die dann auch noch unter dem Gesichtspunkte der Abbildung aufgefaßt werden kann.

Wir erörtern dies an einigen Beispielen. — Ist das Gebiet von zwei konzentrischen Kreisen, und zwei Radien derselben begrenzt, so ist das ein Beispiel dafür, wie man durch Einführung von Polarkoordinaten zu konstanten Grenzen gelangen kann. Dies ist bereits oben dagewesen.

Dieser Substitution ist die Ivorysche ähnlich. Es wird gesetzt

$$x = ar\cos u, \quad y = br\sin u.$$

Konstanten Werten von r entsprechen einander ähnliche Ellipsen mit den Halbachsen ar, br. Wir nehmen $a > b$ an. Konstanten Werten von u entsprechen gerade Linien durch den Koordinatenanfang. Um die Substitution geometrisch zu deuten, schlagen wir (siehe die nebenstehende Figur) über der großen Achse $A\Pi = 2ar$ einen Kreis und verlängern die Ordinate des Punktes xy bis zum Schnitt P mit dem Kreise. So ist $Px = ay : b$. Da $y : x = b\,tg\,u : a$ ist, und $y : x = b(Px) : ax$, so folgt $tg\,u = (Px) : x$, und es ist $u = \sphericalangle PO\Pi$ die sogenannte exzentrische Anomalie des Punktes xy. Der Ellipsensektor $yo\Pi$ wird dadurch erhalten, daß man den Kreissektor $PO\Pi$ mit $b:a$ multipliziert. Er ist deshalb gleich $ba^2r^2u : 2a = \frac{1}{2}abr^2u$. Zur Anomalie $u + du$ gehört der Sektor $\frac{1}{2}abr^2(u+du)$ und es ist die Differenz dieser Sektoren gleich $\frac{1}{2}abr^2du$. Bilden wir nun den entsprechenden Sektor der zu $r + dr$ gehörenden Ellipse, und dann die Differenz der beiden, so ist diese bis auf eine kleine Größe dritter Ordnung



$$\tau = abr\,dr\,du.$$

Dieses Flächenelement ist von zwei nahe benachbarten ähnlichen Ellipsen und zwei nahe benachbarten Radii vectores begrenzt. Es wird demnach

$$\int f(x,y)\,dT = ab\int\int f(ar\cos u,\ br\sin u)\,r\,dr\,du.$$

Wird das Gebiet T von zwei ähnlich und ähnlich liegenden Ellipsen und zwei Mittelpunktsstrahlen begrenzt, so wird durch die Ivorysche

Substitution das Integral $\int f(x,y)\,dT$ auf ein Doppelintegral mit konstanten Grenzen zurückgeführt.

Ist das Gebiet T ein Rechteck, dessen Seiten den Koordinatenachsen nicht parallel sind, so zerlegen wir dasselbe durch gerade Linien, die den Rechteckseiten parallel sind, in rechteckige Elemente τ. Ist η die Entfernung eines Punktes im Rechteck von einer durch den Koordinatenanfang gehenden einer Rechteckseite parallelen Geraden, ξ die Entfernung von einer auch durch den Koordinatenanfang gehenden, auf jener senkrecht stehenden Geraden, und ist ω der Winkel, den die erste Gerade ($\eta = 0$) mit der positiven x-Achse einschließt, so ist

$$\xi = x\cos\omega + y\sin\omega, \quad \eta = -x\sin\omega + y\cos\omega,$$
$$x = \xi\cos\omega - \eta\sin\omega, \quad y = \xi\sin\omega + \eta\cos\omega.$$

In einem Punkte des Rechtecks T hat der Integrand $f(x,y)$ den Wert

$$f(x,y) = f(\xi\cos\omega - \eta\sin\omega,\ \xi\sin\omega + \eta\cos\omega) = \varphi(\xi,\eta),$$

es ist $f(x,y)$ eine Funktion von ξ und η. Scharen paralleler Linien ξ und η zerlegen das Rechteck T in kleine Rechtecke τ gleich $d\xi\,d\eta$. Es ist demnach das über T erstreckte Integral

$$\int f(x,y)\,dT = lim \sum \varphi(\xi,\eta)\,\tau = \int_{\alpha}^{\beta} d\xi \int_{\gamma}^{\delta} \varphi(\xi,\eta)\,d\eta,$$

wenn $\eta = \gamma$, $\eta = \delta$; $\xi = \alpha$, $\xi = \beta$ den Seiten des gegebenen Rechtecks entsprechen. Damit sind die konstanten Grenzen erreicht.

Durch unsere Substitution wird das gegebene Rechteck T der xy-Ebene auf ein anderes in der $\xi\eta$-Ebene abgebildet, dessen Seiten den neuen Koordinatenachsen ξ, η parallel sind. Die Abbildung ist eine kongruente, die Rechtecke $dx\,dy$ sind den Rechtecken $d\xi\,d\eta$, ihren Bildern, kongruent.

Die Einführung neuer Koordinaten durch Parallelverschiebung braucht wegen ihrer Einfachheit nicht besonders erörtert zu werden.

129) Es seien $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ die Parameterdarstellungen zweier Kurvenscharen, die in T folgende Eigenschaften haben:

Die Kurven, die verschiedenen festen u entsprechen, schneiden sich in T nicht, und die Kurven, die verschiedenen festen v entsprechen, schneiden sich in T ebenfalls nicht. Jede Kurve u wird von jeder Kurve v in einem und nur einem Punkte getroffen unter einem von 0 und π verschiedenen Winkel. Durch jeden Punkt x, y geht ein (und folglich) nur ein Kurvenpaar u, v. Die Abstände der Kurven, die benachbarten Werten von u entsprechen, und ebenso die Abstände der Kurven, die benachbarten Werten von v entsprechen, werden beliebig klein, wenn u bzw. v hin-

reichend wenig geändert werden. Die Funktionen x, y besitzen nach u und v bestimmte endliche und stetige Differentialquotienten.

Bildet man das Gebiet T durch die Beziehungen $x = x(u, v)$, $y(u, v)$ in die uv-Ebene ab, deren Punkte durch rechtwinklige Koordinaten u, v bestimmt werden, so bildet sich das Gebiet T in der uv-Ebene auf ein Gebiet S ab. Die Abbildung ist eineindeutig. Ein sehr kleines Rechteck σ mit den Ecken u, v; $u + du, v$; $u + du, v + dv$; $u, v + dv$, ist das Bild eines Vierecks in T.

Es werde $f[x(u, v), y(u, v)] = \varphi(u, v)$ gesetzt, dann hat φ im Punkte uv denselben Wert, als f im entsprechenden Punkte xy. Aber der Inhalt des Rechtecks $\sigma = du\,dv$ ist nicht gleich dem Inhalt des entsprechenden Vierecks τ, wenn auch σ sehr klein genommen wird. Es wird vielmehr

$$\tau = [u, v]\,\sigma$$

sein, wo $[u, v]$ eine Funktion von u, v, und also auch von xy ist. Kennt man diesen Faktor, so ist

$$\Sigma f \cdot \tau = \Sigma \varphi \cdot [u, v] \cdot \sigma,$$

wo die Summe links über alle Elemente τ des Gebietes T, die Summe rechts über alle σ des Gebietes S zu erstrecken ist.

Es kommt darauf an, den Faktor $[u, v]$ zu finden, wobei du, dv positive Inkremente sein mögen. Wir wählen die Buchstaben u, v so, daß dem Dreieck u, v; $u + du, v$; $u, v + dv$ der uv-Ebene ein positives Dreieck mit den Ecken x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 entspricht, d. h. ein Dreieck, daß bei einem Umgange von x, y nach x_1, y_1 nach x_2, y_2 zur Linken liegt. Dieses Lagenverhältnis besteht im ganzen Gebiete T bei unseren Annahmen, wenn es in einem Punkte besteht, und der Faktor $[u, v]$ kann nirgends verschwinden. Der doppelte (positive) Inhalt des u, v; $u + du, v$; $u, v + dv$ entsprechenden Dreiecks oder der Inhalt von τ ist bis auf kleine Größen dritter Ordnung

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x + \frac{\partial x}{\partial u} du & y + \frac{\partial y}{\partial u} du & 1 \\ x + \frac{\partial x}{\partial v} dv & y + \frac{\partial y}{\partial v} dv & 1 \end{vmatrix} = du\,dv \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right),$$

und es ist also

$$[u, v] = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Dieser Ausdruck wird Funktionaldeterminante genannt. Sie ist nach den hier gemachten Voraussetzungen stetig.

Man wird demnach schreiben können

$$\int f\,dT = \int \varphi \cdot [u,v]\,dS, \quad \iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint \varphi(u,v)\,[u,v]\,du\,dv.$$

Lassen sich die Kurven $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ so wählen, daß das Bild S von T ein Rechteck wird, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind, treten also die Kurven u sämtlich für ein festes $v = v_0$ in T ein, für $v = v_1$ aus T heraus, und die Kurven v für ein festes $u = u_0$ in T ein, für $u = u_1$ aus T heraus, so folgt

$$\int f\,dT = \int_{u_0}^{u_1} du \int_{v_0}^{v_1} \varphi(u,v)\,[u,v]\,dv$$

und das Integral ist auf ein anderes mit konstanten Grenzen zurückgeführt.

130) T ist ein beliebiges Viereck. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß das Viereck T keine parallelen Seiten hat. Zwei gegenüberliegende Seiten mögen sich im Punkte $x_1 y_1$, die beiden anderen im Punkte $x_2 y_2$ schneiden. Wir vereinfachen das Problem dadurch, daß wir (was durch Schiebung und Drehung zu erreichen ist) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ annehmen. Dann setzen wir

$$\xi = \frac{y - y_1}{x}, \quad \eta = \frac{y - y_2}{x}, \quad x = \frac{y_2 - y_1}{\xi - \eta}, \quad y = \frac{\xi y_2 - \eta y_1}{\xi - \eta}.$$

Jedem ξ entspricht eine Gerade durch den Punkt y_1, jedem η eine Gerade durch y_2. Die Geraden $\xi\eta$ zerlegen das Viereck T in Elemente von der Größe

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) d\xi\,d\eta = \frac{(y_2 - y_1)^2}{(\xi - \eta)^3}\,d\xi\,d\eta,$$

und man kann durch Wahl der Bezeichnung $\xi\eta$ bewirken, daß dieser Ausdruck positiv ist, wenn $d\xi\,d\eta$ positiv genommen werden. Dann erhält man

$$\int f(x,y)\,dT = (y_2 - y_1)^2 \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi \int_{\eta_0}^{\eta_1} f\left(\frac{y_2 - y_1}{\xi - \eta}, \frac{\xi y_2 - \eta y_1}{\xi - \eta}\right) \frac{d\eta}{(\xi - \eta)^3}.$$

Dabei sind $\xi_0 \xi_1$, $\eta_0 \eta_1$ die den Viereckseiten entsprechenden Werte von $\xi\eta$. Daß im Viereck nicht $\xi = \eta$ werden kann, ist leicht zu erkennen.

131) Wir wollen jetzt die Gleichungen zwischen xy und $\xi\eta$ als eine Abbildung auffassen. Durch die Beziehungen

$$\xi = y - y_1 : x, \quad \eta = y - y_2 : x$$

wird das xy-Feld auf ein $\xi\eta$-Feld abgebildet, in dem $\xi\eta$ rechtwinklige

Koordinaten sind. Die Abbildung ist kollinear. Einem rechteckigen Element τ im xy-Felde entspricht ein Element $(y_2-y_1)^2 d\xi\, d\eta : (\xi-\eta)^3$ im $\xi\eta$-Felde. Wir können also über die Rechtecke $d\xi\, d\eta$ summieren oder integrieren, wenn wir jedes mit einem Faktor multiplizieren, durch welchen das Element $d\xi\, d\eta$ dem im Bilde entsprechenden Elemente τ gleich gemacht wird.

Durch Kollineation kann man ein Viereck auch auf ein Rechteck abbilden, wenn zwei Seiten parallel sind. Ein Dreieck läßt sich durch Kollineation auf einen Parallelstreifen so abbilden, daß dieser von zwei parallelen Geraden, die man einer Koordinatenachse parallel machen kann, und einer darauf senkrechten Geraden begrenzt wird. Dadurch werden ebenfalls konstante Integrationsgrenzen erreicht.

132) Elliptische Koordinaten. Es sei $0 < \sigma_2 < \sigma_1$. Dann wird durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{\sigma_1+\lambda} + \frac{y^2}{\sigma_2+\lambda} - 1 = 0,$$

$$\lambda^2 + \lambda(\sigma_1+\sigma_2-x^2-y^2) + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2 x^2 - \sigma_1 y^2 = 0$$

ein System von konfokalen Hyperbeln und Ellipsen mit den Brennpunkten $y=0$, $x = \pm\sqrt{\sigma_1-\sigma_2}$ bestimmt, und zwar ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, wenn $-\sigma_1 < \lambda = u < -\sigma_2$ ist, eine Ellipse, wenn $-\sigma_2 < \lambda = v \leqq \infty$ ist. Durch jeden Punkt der xy-Ebene geht *eine* Hyperbel und *eine* Ellipse, so daß u, v *eindeutige* Funktionen von xy sind. Es ist nämlich

$$2u = \sigma_1+\sigma_2-x^2-y^2 - \sqrt{(\sigma_1+\sigma_2-x^2-y^2)^2 - 4(\sigma_1\sigma_2-\sigma_2x^2-\sigma_1y^2)},$$

$$2v = \sigma_1+\sigma_2-x^2-y^2 + \sqrt{(\sigma_1+\sigma_2-x^2-y^2)^2 - 4(\sigma_1\sigma_2-\sigma_2x^2-\sigma_1y^2)}.$$

Umgekehrt ist

$$x = \sqrt{\frac{\sigma_1+u\cdot\sigma_1+v}{\sigma_1-\sigma_2}}, \quad y = \sqrt{\frac{\sigma_2+u\cdot\sigma_2+v}{\sigma_2-\sigma_1}}.$$

Es sind x, y zweideutige Funktionen von u, v, der Punkt x, y ist bestimmt, wenn noch der Quadrant gegeben ist, in dem der Punkt liegt. Nehmen wir aber das Gebiet T in dem durch die positive x- und y-Achse begrenzten Teil der xy-Ebene an, so ist die Beziehung in T eindeutig. Auf solche Gebiete muß man zunächst die Substitution beschränken.

Wächst u, so wächst die reelle Achse der zugehörigen Hyperbel, wodurch die gegenseitige Lage der Hyperbeln u und $u+du$ bestimmt ist. Wächst v, so wachsen die Achsen der zugehörigen Ellipse, wodurch die gegenseitige Lage der Ellipsen v, $v+dv$ bestimmt ist. Das Dreieck

$$u, v;\ u+du, v;\ u, v+dv$$

ist im ersten Quadranten, also in T, positiv. Der Inhalt des Flächen-

elementes τ mit den Ecken u, v; $u + du, v$; $u + du, v + dv$; $u, v + dv$ hat den Wert der mit $du\,dv$ multiplizierten Determinante

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u},$$

wo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma_1 - \sigma_2}} \cdot \frac{\sigma_1 + v}{\sqrt{\sigma_1 + u \cdot \sigma_1 + v}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma_1 - \sigma_2}} \cdot \frac{\sigma_1 + u}{\sqrt{\sigma_1 + u \cdot \sigma_1 + v}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-1}{2\sqrt{\sigma_1 - \sigma_2}} \cdot \frac{\sigma_2 + v}{\sqrt{-(\sigma_2 + u)(\sigma_2 + v)}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-1}{2\sqrt{\sigma_1 - \sigma_2}} \cdot \frac{\sigma_2 + u}{\sqrt{-(\sigma_2 + u)(\sigma_2 + v)}}$$

ist, der Inhalt ist also gleich

$$\frac{\frac{-1}{4(\sigma_1 - \sigma_2)}\begin{vmatrix} \sigma_1 + v, & \sigma_1 + u \\ \sigma_2 + v, & \sigma_2 + u \end{vmatrix}}{\sqrt{-(\sigma_1 + u)(\sigma_2 + u)(\sigma_1 + v)(\sigma_2 + v)}} = \frac{\frac{1}{4}(v - u)\,du\,dv}{\sqrt{-(\sigma_1 + u)(\sigma_2 + u)(\sigma_1 + v)(\sigma_2 + v)}}.$$

Um einen wenn auch sehr einfachen Fall als Beispiel einer Anwendung dieser Substitution zu haben, nehmen wir an, es handle sich darum, den Flächeninhalt eines (im ersten Quadranten) liegenden Flächenstückes, das von zwei konfokalen Hyperbeln u_0, u_1 und zwei konfokalen Ellipsen v_0, v_1 begrenzt ist, zu ermitteln. Der Integrand $f(x, y)$ ist dann gleich Eins. Dieser Flächeninhalt ist, wenn gesetzt wird

$$\psi(u, v) = \sqrt{-(\sigma_1 + u)(\sigma_1 + v)(\sigma_2 + u)(\sigma_2 + v)},$$

$$\frac{1}{4}\int_{v_0}^{v_1}\int_{u_0}^{u_1} \frac{(v - u)\,du\,dv}{\psi(u, v)}$$

$$= \frac{1}{4}\int_{u_0}^{u_1} du \int_{v_0}^{v_1} \frac{\left[v + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\right]dv}{\psi(u, v)} - \frac{1}{4}\int_{v_0}^{v_1} dv \int_{u_0}^{u_1} \frac{\left[u + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\right]du}{\psi(u, v)}$$

$$= \frac{\sqrt{\sigma_1 + v_1 \cdot \sigma_2 + v_1} - \sqrt{\sigma_1 + v_0 \cdot \sigma_2 + v_0}}{4} \cdot P$$

$$- \frac{\sqrt{-(\sigma_1 + u_1)(\sigma_2 + u_1)} - \sqrt{-(\sigma_1 + u_0)(\sigma_2 + u_0)}}{4} \cdot Q,$$

$$P = \left(arc\,sin\,\frac{2u_1 + \sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} - arc\,sin\,\frac{2u_0 + \sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\right)$$

$$Q = lg\,\frac{2v_1 + \sigma_1 + \sigma_2 + 2\sqrt{\sigma_1 + v_1 \cdot \sigma_2 + v_1}}{2v_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + 2\sqrt{\sigma_1 + v_0 \cdot \sigma_2 + v_0}}.$$

Es fragt sich, ob das Integral $\int f dT$ in der transformierten Form bis $u_0 = -\sigma_1$ und $u_1 = -\sigma_2$ ausgedehnt werden darf. An beiden Stellen

ist die Funktionaldeterminante unendlich groß. Da aber das Integral bis in jede beliebige Nähe dieser Stellen genommen werden kann, und das Integral, wenn der Integrand unendlich groß wird, durch eine Limes zu definieren ist, so ist die Ausdehnung bis an diese Stellen in der Tat zulässig. Für den Flächeninhalt erhält man in diesem Falle

$$\frac{\sqrt{\sigma_1+v_1}\cdot\sqrt{\sigma_2+v_1}-\sqrt{\sigma_1+v_0}\cdot\sqrt{\sigma_2+v_0}}{4}\pi=\frac{a_1b_1-a_0b_0}{4}\pi,$$

wenn a_1b_1, a_0b_0 die Achsen der zu v_1v_0 gehörenden Ellipsen sind.

Ebenso läßt sich das Integral bis zu $v=-\sigma_1$ erstrecken. Liegt aber das Gebiet T in zwei Quadranten, so ist zu beachten, daß in ihnen der Funktionaldeterminante verschiedene Vorzeichen zuzuerteilen sind.

Man unterlasse nicht, unsere Substitution noch als Abbildung aufzufassen.

133) Daß die von uns gemachten Annahmen über die Kurven u, v nicht unbedingt überall erfüllt sein müssen, lehrt das einfache Beispiel der Polarkoordinaten. Die Kurven u, v sind dann konzentrische Kreise und deren Radien. Die letzteren schneiden sich. Wir können aber auf allgemeinere Untersuchungen solcher Fälle nicht eingehen, sondern müssen sie der Spezialbetrachtung bei vorkommenden Fällen überlassen.

134) Das Potential einer homogenen Kreisfläche. Um das Potential einer homogenen Kreisfläche zu bestimmen, beweise man zunächst die beiden Formeln

$$\frac{\pi}{e}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\lambda}{e^2+\lambda^2},\qquad \int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{a-b\cos\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Das erste Integral ergibt sich ohne weiteres durch die Substitution $e\lambda$ für λ, im zweiten Integral wird $b<a$ vorausgesetzt. Es ist

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{a-b\cos\omega}=2\int_0^{\pi}\frac{d\omega}{a\left(\cos^2\frac{1}{2}\omega+\sin^2\frac{1}{2}\omega\right)-b\left(\cos^2\frac{1}{2}\omega-\sin^2\frac{1}{2}\omega\right)}$$

$$=2\int_0^{\pi}\frac{d\omega}{(a-b)\cos^2\frac{1}{2}\omega+(a+b)\sin^2\frac{1}{2}\omega}=2\int_0^{\pi}\frac{d\omega:\cos^2\frac{1}{2}\omega}{a-b+(a+b)\,tg^2\frac{1}{2}\omega}$$

$$=4\int_0^{\pi}\frac{d\,tg\frac{1}{2}\omega}{a-b+(a+b)\,tg^2\frac{1}{2}\omega}.$$

Nun setze man $tg\frac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}x$, so ist $x=0$ für $\omega=0$, $x=\infty$ für $\omega=\pi$, und es folgt

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{a-b\cos\omega} = \frac{4}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^{\infty}\frac{dz}{1+z^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes im Raume seien x, y, z, die eines Punktes der Kreisfläche seien ξ, η. Dann ist das Potential, wenn die Dichte der Masse auf der Kreisfläche gleich Eins angenommen wird, das über die Kreisfläche erstreckte Doppelintegral

$$V = \int\int\frac{d\xi\,d\eta}{e}, \quad e = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}.$$

Nun führen wir Polarkoordinaten ein,

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad \xi = \varrho\cos\vartheta, \quad \eta = \varrho\sin\vartheta,$$

so folgt, wenn k der Radius des Randes der Kreisfläche ist,

$$V = \int_0^k \varrho\,d\varrho\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{r^2+z^2+\varrho^2-2r\varrho\cos(\vartheta-t)}}.$$

Aus der Ungleichung $(r-\varrho)^2+z^2+\lambda^2>0$ schließt man, daß

$$r^2+\varrho^2+\lambda^2+z^2>2r\varrho$$

ist, wenn nicht gleichzeitig $z=0$, $\lambda=0$, $r=\varrho$ ist.

Nach der ersten, und dann nach der zweiten der oben angesetzten Integralformeln ist

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{e} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{r^2+z^2+\varrho^2+\lambda^2-2r\varrho\cos(\vartheta-t)}$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{(r^2+z^2+\varrho^2+\lambda^2)^2-4r^2\varrho^2}}.$$

Multipliziert man mit $\varrho\,d\varrho$, integriert über ϱ, nachdem man die Integrationsfolge umgekehrt hat, so folgt

$$V = \int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_0^k\frac{2\varrho\,d\varrho}{\sqrt{(r^2+z^2+\varrho^2+\lambda^2)^2-4r^2\varrho^2}} = \int_{-\infty}^{\infty}lg\,R\,d\lambda,$$

wo R die positive Größe

$$R = \frac{k^2+z^2-r^2+\lambda^2+\sqrt{k^4+2k^2(z^2+\lambda^2-r^2)+(z^2+r^2+\lambda^2)^2}}{2(z^2+\lambda^2)}$$

ist.

Das Integral

$$\int_0^{\varrho} \frac{2\varrho\, d\varrho}{\sqrt{(r^2+\varrho^2+z^2+\lambda^2)^2-4r^2\varrho^2}}$$

hat nur positive Integrationselemente, ist deshalb positiv. Da es gleich $lg\, R$ ist, so ist R nicht bloß positiv, sondern auch noch größer als Eins. $lg\, R$ wird für wachsende λ unendlich klein zweiter Ordnung, so daß auch noch $lim\ \lambda\, lg\, R = 0$ für wachsende λ ist.

Durch partielle Integration gelangt man zu der Formel

$$V = -2\int_0^{\infty} \frac{\lambda\, d\, lg\, R}{d\lambda}\, d\lambda = -2\int_{R_0}^{1} \frac{\lambda\, dR}{R}.$$

Aus der Definitionsgleichung für R folgt

$$\lambda^2 = [-z^2(R^2-R) + R(k^2-r^2) + r^2] : (R^2-R),$$

so daß man für V das elliptische Integral erhält

$$V = -2\int_{R_0}^{1} \sqrt{\frac{-z^2R^2+(z^2+k^2-r^2)R+r^2}{R(R-1)}} \cdot \frac{dR}{R}.$$

$$R_0 = \frac{z^2+k^2-r^2+\sqrt{(z^2+k^2-r^2)^2+4z^2r^2}}{2(z^2+k^2)}$$

ist die positive Wurzel der Gleichung

$$z^2(R^2-R) - R(k^2-r^2) - r^2 = 0.$$

Da das Produkt der beiden Wurzeln negativ ist, so ist stets eine positive Wurzel vorhanden, nach dem oben bemerkten ist sie größer als Eins.

Durch die Substitution $R = (s+k^2) : s$ pflegt man diesen Ausdruck auf die Form zu bringen

$$V = 2k^2\int_{\sigma}^{\infty} \sqrt{1-\frac{z^2}{s}-\frac{r^2}{s+k^2}} \cdot \frac{ds}{(s+k^2)\sqrt{s}},$$

wo σ die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{z^2}{\sigma} + \frac{r^2}{\sigma+k^2} = 1$$

ist.

Fällt der angezogene Punkt xyz in das Innere des Kreises, so kann man diesen Fall durch einen Grenzübergang erledigen, es ist dann für σ Null zu setzen.

Das was geleistet ist, besteht darin, daß das ursprüngliche Doppelintegral des Potentials auf ein einfaches zurückgeführt ist. Die gegebene Methode rührt von E. Heine (Crelles Journal Bd. 76) her.

135) Transformation eines einfachen Integrales durch eine Gaußsche Substitution. Die Herleitung der Gaußschen Substitution ist eine im wesentlichen algebraische Arbeit. Diese soll hier nicht durchgeführt werden, es sollen vielmehr nur die Resultate gegeben werden. Ich verweise hier auf Gauß' gesammelte Werke, Bd. III, S. 333, und auf Clebsch, Crelles Journal, Bd. 61, S. 187. Gauß macht die Substitution:

$$\cos\vartheta = \frac{c_{11}+c_{12}\cos\varphi+c_{13}\sin\varphi}{c_{31}+c_{32}\cos\varphi+c_{33}\sin\varphi}, \quad \sin\vartheta = \frac{c_{21}+c_{22}\cos\varphi+c_{23}\sin\varphi}{c_{31}+c_{32}\cos\varphi+c_{33}\sin\varphi},$$

$$\cos\varphi = \frac{\gamma_{11}+\gamma_{21}\cos\vartheta+\gamma_{31}\sin\vartheta}{\gamma_{13}+\gamma_{23}\cos\vartheta+\gamma_{33}\sin\vartheta}, \quad \sin\varphi = \frac{\gamma_{12}+\gamma_{22}\cos\vartheta+\gamma_{32}}{\gamma_{13}+\gamma_{23}\cos\vartheta+\gamma_{33}\sin\vartheta},$$

$$\frac{d\vartheta}{\sqrt{(a\cos\vartheta-x)^2+(b\sin\vartheta-y)^2+z^2}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{g-g'\cos^2\varphi-g''\sin^2\varphi}},$$

wo die γ die Adjunkten der c in der Determinante $|c|$, und g, g', g'' die Wurzeln der Gleichung $f(\lambda)=0$, wenn $f(\lambda)$ durch die Gleichung

$$\frac{f(\lambda)}{\lambda(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)} = 1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{\lambda}=0$$

definiert wird, und zwar ist g die positive Wurzel dieser Gleichung. Eine solche ist, wenn z nicht 0 ist, stets vorhanden. Ist $z=0$ und liegt x, y außerhalb der Ellipse $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$, so ist auch eine positive Wurzel vorhanden, liegt x, y, z im Innern der Ellipse, so ist für g die Wurzel $\lambda=0$ zu nehmen. Gauß rechnet die Koeffizienten c und ihre Adjunkten vollständig aus. Wir brauchen hier diese Größen selbst nicht, bemerken nur noch, daß φ ein Intervall von der Größe 2π, etwa von φ_0 bis $\varphi_0+2\pi$ durchläuft, wenn ϑ das Intervall von 0 bis 2π durchläuft. Es folgt deshalb

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{(a\cos\vartheta-x)^2+(b\sin\vartheta-y)^2+z^2}} = \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{g-g'\cos^2\varphi-g''\sin^2\varphi}}.$$

Das Intervall $\varphi_0\cdots\varphi_0+2\pi$ im zweiten Integrale durfte wegen der Periodizität der Funktionen $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi$ durch das Intervall $0\cdots2\pi$ ersetzt werden. Auch darf man dafür viermal das Integral von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ nehmen.

136) Weitere Transformationen nach Grube. Wir setzen

$$\sin^2\varphi = \frac{g-g'}{\lambda-g'}, \quad \cos^2\varphi = \frac{\lambda-g}{\lambda-g'},$$

$$\begin{aligned}(\lambda-g')(g-g'\cos^2\varphi-g''\sin^2\varphi) &= g(\lambda-g')-g'(\lambda-g)-g''(g-g')\\ &= \lambda(g-g')-g''(g-g') = (\lambda-g'')(g-g'),\end{aligned}$$

$$2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \frac{(g'-g)\,d\lambda}{(\lambda-g')^2}, \quad d\varphi = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{g-g'}\,d\lambda}{(\lambda-g')\sqrt{\lambda-g}}.$$

Dann folgt

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{g - g' \cos^2\varphi - g' \sin^2\varphi}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

wo $f(\lambda)$ dieselbe Bedeutung wie in voriger Nummer hat. Für $\varphi = 0$ ist $\lambda = \infty$, für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ist $\lambda = g$. Deshalb ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(a\cos\vartheta - x)^2 + (b\sin\vartheta - y)^2 + z^2}} = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{g - g'\cos^2\varphi - g''\sin^2\varphi}}$$

$$= 2\int_g^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = 2\,\Re\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

wo das vorgesetzte $\Re$ bedeutet, daß der reelle Teil des dahinterstehenden Ausdruckes zu nehmen ist.

137) Das Potential einer elliptischen homogenen Scheibe. Sind ξ, η die Koordinaten eines Scheibenpunktes, x, y, z die Koordinaten eines Raumpunktes mit der Masse Eins, und ist die Dichte der Scheibe Eins, so ist das Potential das über die elliptische Scheibe zu erstreckende Integral

$$\int \frac{dT}{r} = \int\int \frac{d\xi\, d\eta}{r}, \quad r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2.$$

Durch die Ivorysche Substitution

$$\xi = au\cos v, \quad \eta = bu\sin v, \quad dT = abu\, du\, dv,$$

wo ab die Halbachsen der Ellipse sind, finden wir für das Potential das Doppelintegral

$$V = ab\int_0^1 u \int_0^{2\pi} \frac{dv\, du}{\sqrt{(au\cos v - x)^2 + (bu\sin v - y)^2 + z^2}}.$$

Durch die Transformationen von Gauß und Grube ergibt sich

$$V = 4ab\int_0^1 u \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega\, du}{\sqrt{g - g'\cos^2\omega - g''\sin^2\omega}} = \Re\, 2ab\int_0^1 u \int_0^{\infty} \frac{d\lambda\, du}{\sqrt{h(\lambda)}},$$

wo

$$h(\lambda) = \lambda(a^2u^2 + \lambda)(b^2u^2 + \lambda) - x^2\lambda(b^2u^2 + \lambda) - y^2\lambda(a^2u^2 + \lambda) - z^2(a^2u^2 + \lambda)(b^2u^2 + \lambda)$$

ist und g die positive, g', g'' die negativen Wurzeln der Gleichung $h(\lambda) = 0$ sind. Nun ersetzen wir noch λ durch $u^2 s$ und erhalten dadurch

$$V = \mathfrak{R}\, 2ab \int_0^1 u \int_0^\infty \frac{ds\,du}{\sqrt{U}}$$

$$U = u^2 s(s+a^2)(s+b^2) - x^2 s(s+b^2) - y^2 s(s+a^2) - z^2(s+a^2)(s+b^2).$$

Nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge läßt sich die Integration über u ausführen, wodurch, wenn f die Bedeutung wie in Nummer 135) hat, sich ergibt

$$V = \mathfrak{R}\begin{cases} 2ab \int_0^\infty \frac{\sqrt{f(s)}}{s(s+a^2)(s+b^2)}\, ds \\ -2ab \int_0^\infty \frac{\sqrt{-x^2 s(s+b^2) - y^2 s(s+a^2) - z^2(s+a^2)(s+b^2)}}{s(r+a^2)(s+b^2)}\, ds. \end{cases}$$

Der zweite Teil dieses Ausdruckes ist rein imaginär, und deshalb wegen des vorgesetzten $\mathfrak{R}$ fortzulassen. Wir dürfen daher schreiben

$$V = \mathfrak{R}\, 2ab \int_0^\infty \frac{\sqrt{f(s)}}{s(s+a^2)(s+b^2)}\, ds$$

$$= 2ab \int_\sigma^\infty \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{s+a^2} - \frac{y^2}{s+b^2} - \frac{z^2}{s}}}{\sqrt{s(s+a^2)(s+b^2)}}\, ds,$$

wo σ die größte Wurzel der Gleichung $f(\sigma) = 0$ ist.

138) Das Potential eines homogenen Ellipsoides. Man kann hieraus leicht das Potential eines Ellipsoides finden, indem man dasselbe in unendlich dünne Schichten parallel der xy-Ebene zerlegt und die Summe, oder vielmehr das Integral, über alle die elliptischen Schichten bildet. Ich begnüge mich damit, das Resultat herzusetzen. Sind a, b, c die Halbachsen des Ellipsoides, so ist

$$V = abc\pi \int_\sigma^\infty \left(1 - \frac{x^2}{s+a^2} - \frac{y^2}{s+b^2} - \frac{z^2}{s+c^2}\right) \frac{ds}{\sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}}.$$

Dabei ist σ die größte Wurzel der Gleichung

$$(\sigma+a^2)(\sigma+b^2)(\sigma+c^2)\left(1 - \frac{x^2}{\sigma+a^2} - \frac{y^2}{\sigma+b^2} - \frac{z^2}{\sigma+c^2}\right) = 0.$$

Züge hat im 10. Bande der Leipziger math. Annalen auf eine Anregung Heines dieses Potential durch Summation von Kreisschichten berechnet. — Es ist durch diese Form von V ein ursprünglich dreifaches Integral auf ein einfaches oder, wie man sagt, auf eine einfache Quadratur zurückgeführt.

Das Fouriersche Doppelintegral.

139) Erweiterung des Satzes unter 44). Ist $\varphi(\varrho)$ eine Funktion von ϱ, die in dem Intervalle $0 \cdots b$, $b > 0$ unbedingt integrabel ist, und mit abnehmenden ϱ verschwindet, so ist, unter gewissen Bedingungen für das Verschwinden dieser Funktion φ an der Stelle Null, der Grenzwert

$$\lim_{\omega = \infty} F(\omega) = \int_0^b \varphi(\varrho) \sin \omega\varrho \frac{d\varrho}{\varrho} = 0.$$

Ist $0 < c < b$, so ist nach 44)

$$\lim_{\omega = \infty} \int_c^b \varphi(\varrho) \sin \omega\varrho \frac{d\varrho}{\varrho} = 0.$$

Dort war allerdings der Integrand als überall endlich bleibend vorausgesetzt. Wird derselbe aber so unendlich groß an einzelnen Stellen, daß er unbedingt integrabel bleibt (vgl. § 100), so kann man diese durch Umgebungen ausschalten, die man so klein machen kann, daß die Summe der Beiträge dieser Intervalle zum Gesamtintegral beliebig klein wird. Daraus folgt dann, daß der Satz auch in diesem Falle gilt. Es bleibt noch das Integral zwischen 0 und c zu untersuchen, wo c beliebig klein angenommen werden darf.

Wir nehmen nun als *ersten* Fall an, daß wir c so klein annehmen können, daß $\varphi(\varrho)$ mit abnehmenden ϱ *monoton* gegen Null konvergiert. Es ist

$$\int_0^c \varphi(\varrho) \sin \omega\varrho \frac{d\varrho}{\varrho} = \int_0^{\omega c} \varphi\left(\frac{\varrho}{\omega}\right) \sin \varrho \frac{d\varrho}{\varrho}.$$

Nach dem zweiten Mittelwertsatze (40) ist $(\lambda < \omega c)$

$$\int_0^{\omega c} \varphi\left(\frac{\varrho}{\omega}\right) \sin \varrho \frac{d\varrho}{\varrho} = \varphi(0) \int_0^{\lambda} \frac{\sin \varrho\, d\varrho}{\varrho} + \varphi(c) \int_{\lambda}^{\omega c} \frac{\sin \varrho\, d\varrho}{\varrho} = \varphi(c) \int_{\lambda}^{\omega c} \frac{\sin \varrho\, d\varrho}{\varrho}.$$

Da nun $\varphi(\varrho)$ für abnehmende ϱ gegen Null konvergiert, so können wir c so klein annehmen, daß $\varphi(c)$ und folglich das Integral unabhängig von ω beliebig klein wird. In dem Integral

$$\int_0^b \varphi(\varrho) \sin \omega\varrho \frac{d\varrho}{\varrho} = \int_0^c \varphi(\varrho) \sin \omega\varrho \frac{d\varrho}{\varrho} + \int_c^b \varphi(\varrho) \sin \omega\varrho \frac{d\varrho}{\varrho}$$

nehmen wir also zuerst c so klein an, daß der erste Teil beliebig klein wird, dann ω so groß, daß der zweite Teil beliebig klein wird, woraus folgt, daß das Gesamtintegral für wachsende ω den Grenzwert Null hat.

Im *zweiten* Falle nehme $\varphi(\varrho)$ für abnehmende ϱ gegen Null ab, aber nicht monoton. Es läßt sich beweisen, daß der Satz gilt, wenn die Funktion $\varphi(\varrho):\varrho$ bis an Null heran unbedingt integrabel ist. Die Beweismethode wird hinreichend klargelegt, wenn man sich auf den Fall beschränkt, daß man annimmt $\varphi(\varrho)$ lasse sich in die Form setzen $\varphi(\varrho)=\psi(\varrho)\varrho^{\alpha}$, wo α positiv ist und $\psi(\varrho)$ für abnehmende ϱ endlich bleibt. Ist dann M ein Mittelwert der Funktion $\psi(\varrho)\sin\omega\varrho$ im Intervalle $0\cdots c$, so ist

$$\int_0^c \varphi(\varrho)\sin\omega\varrho\,\frac{d\varrho}{\varrho}=\int_0^c \psi(\varrho)\sin\omega\varrho\,\frac{d\varrho}{\varrho^{1-\alpha}}=M\int_0^c\frac{d\varrho}{\varrho^{1-\alpha}}=\frac{M}{\alpha}c^{\alpha},$$

und es wird dieser Ausdruck für hinreichend kleine c beliebig klein. Die weitere Schlußfolgerung ist wie oben, so daß auch in diesem Falle unser Satz erwiesen ist.

Unter allen Umständen ist, wie unter 100) bewiesen wurde,

$$\int_0^b\frac{\sin\omega x\,dx}{x}<2\pi,$$

wie klein auch b sein mag, z. B. wenn $b=\pi:\omega$, oder $b=\pi:\sqrt{\omega}$ ist.

140) Ein anderes Kriterium. Dieses Kriterium für die Gültigkeit des ausgesprochenen Satzes läßt sich aus dem Theorem von du Bois-Reymond herleiten, daß unter gewissen Umständen eine Funktion sich als Summe zweier monotonen Funktionen darstellen läßt. Hat nämlich die Funktion $\varphi(\varrho)$ im Intervalle von 0 bis c die Eigenschaft endlich und stetig zu sein, und bleibt für jedes noch so kleine h der Quotient $(\varphi(\varrho+h)-\varphi(\varrho)):h$ unter einer bestimmten Zahl M, wobei es nicht nötig ist, daß er sich für abnehmende h einem bestimmten Grenzwert nähert, so haben die Funktionen

$$\varphi_1(\varrho)=\varphi(\varrho)+M\varrho,\quad \varphi_2(\varrho)=\varphi(\varrho)-M\varrho$$

die Eigenschaft, daß für hinreichend kleine h

$$\varphi_1(\varrho+h)-\varphi_1(\varrho)>0,\quad \varphi_2(\varrho+h)-\varphi_2(\varrho)<0$$

ist, woraus folgt (vgl. § 20), daß $\varphi_1(\varrho)$, $\varphi_2(\varrho)$ monotone Funktionen sind, die mit ϱ verschwinden, wenn dies für $\varphi(\varrho)$ der Fall ist, und es ist

$$\varphi(\varrho)=\tfrac{1}{2}\varphi_1(\varrho)+\tfrac{1}{2}\varphi_2(\varrho).$$

Verschwindet also $\varphi(\varrho)$ mit ϱ, so erkennt man, daß auch für solche Funktionen, die man halbmonoton nennen kann, der Satz der vorigen Nummer besteht.

141) Ist die Funktion $f(x)$ im Intervalle $a \cdots b$ unbedingt integrabel, und verschwinden $f(x) - f(+0)$, $f(x) - f(-0)$ für abnehmende bzw. für zunehmende x an der Stelle $x = 0$ monoton, oder sind diese Ausdrücke dividiert durch x über die Stelle 0 hinweg absolut integrabel, wo natürlich die Werte $f(\pm 0)$ existieren müssen, so ist

$$\lim_{\omega=\infty} \int_a^b f(\varrho) \frac{\sin \omega \varrho \, d\varrho}{\varrho} = \frac{\pi}{2}[f(+0) + f(-0)],$$

wenn $a < 0 < b$ ist und gleich $\frac{1}{2}\pi f(+0)$, wenn $a = 0$, $0 < b$ ist, gleich $\frac{1}{2}\pi f(-0)$, wenn $a < 0$, $b = 0$ ist, gleich 0, wenn $a < b < 0$ oder $0 < a < b$ ist.

Zum Beweise setze man $f(\varrho) - f(+0) = \varphi(\varrho)$ bzw. $f(-\varrho) - f(-0) = \varphi(\varrho)$ und wende den Satz der Nummer 139) an.

Erfüllen die Funktionen $f(\varrho) - f(+0)$, $f(\varrho) - f(-0)$ die Bedingungen der vorigen Nummer, sind sie halbmonoton, so bleibt der Satz ebenfalls bestehen.

142) Wir betrachten nun den ein eigentliches Doppelintegral darstellenden Ausdruck

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\omega \int_a^b \varphi(\lambda) \cos \mu\lambda \, d\lambda \, d\mu$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_a^b \varphi(\lambda) \int_0^\omega \cos \lambda\mu \, d\mu \, d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(\lambda) \sin \omega\lambda \, d\lambda}{\lambda}.$$

Gehen wir in ihm mit ω zur Grenze ∞ über, $b > a$ annehmend, so finden wir, daß

$$\lim_{\omega=\infty} \Phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_a^b \varphi(\lambda) \cos \lambda\mu \, d\lambda \, d\mu = \frac{1}{2}[\varphi(+0) + \varphi(-0)]$$

sei, wenn die Stelle $\lambda = 0$ im Intervalle $a\,b$ liegt, gleich Null, wenn die Stelle Null außerhalb $a\,b$ liegt, gleich $\frac{1}{2}\varphi(+0)$, wenn $a = 0$ ist, gleich $\frac{1}{2}\varphi(-0)$, wenn b auf Null fällt. Ist φ an der Stelle Null stetig, so kann man natürlich $\varphi(0)$ für $\frac{1}{2}[\varphi(+0) + \varphi(-0)]$ schreiben. Der Ausdruck $\lim \Phi(\omega)$ ist demnach in gewisser Weise unabhängig von a und b, da es für den Wert desselben nur darauf ankommt, ob Null zwischen $a \cdots b$ liegt oder nicht.

Wird $\varphi(\lambda)$ zwischen $a\,b$, etwa an der Stelle c, unendlich groß, so wird der Integrand des Doppelintegrales längs einer Linie unendlich groß.

Man muß dann das Integral über das Intervall $a \cdots b$ in Integrale über die Intervalle von a bis $c - \varepsilon$ und von $c + \eta$ bis b zerlegen und dann mit ε und η zur Grenze Null übergehen.

143) Das Fouriersche Integral. Ist

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_a^b f(\lambda)\cos\mu(\lambda - x)\,d\lambda\,d\mu,$$

so ergibt die Substitution λ für $\lambda - x$ mit Hilfe der vorigen Nummer

$$F = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{a-x}^{b-x} f(\lambda + x)\cos\mu\lambda\,d\lambda\,d\mu = \frac{1}{2}f(x+0) + \frac{1}{2}f(x-0),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_a^b f(\lambda)\cos\mu(\lambda - x)\,d\lambda\,d\mu = \frac{1}{2}f(x+0) + \frac{1}{2}f(x-0),$$

wenn x zwischen a und b liegt, so daß $a - x < 0 < b - x$ ist. Fällt x auf b, so wird $F(x) = \frac{1}{2}f(b-0)$, fällt x auf a, so wird $F(x) = \frac{1}{2}f(a+0)$. Liegt x außerhalb $a \cdots b$, so wird $F(x) = 0$. Der letzte Fall setzt voraus, daß $f(x)$ auch außerhalb $a \cdots b$ unbedingt integrabel ist.

Ist also $f(x)$ im Intervalle $a \cdots b$ eine willkürliche Funktion, die durchgehend einer Integration fähig ist, so stellt das Fouriersche Integral in diesem Intervalle $f(x)$ im allgemeinen dar. Da wo sie unstetig ist, stellt es den Mittelwert zwischen den unmittelbar voraufgehenden und nachfolgenden Werten $\frac{1}{2}f(x+0) + \frac{1}{2}f(x-0)$ dar, am Intervallende a stellt es den Wert $f(a+0)$, am Ende b den Wert $f(b-0)$ dar. Auch wo $f(x)$ unendlich wird, kann in besonderen Fällen das Integral einen bestimmten endlichen Wert haben.

Die Darstellung erfordert, daß $f(x+h) - f(x+0)$, $f(x-h) - f(x-0)$ entweder monoton gegen Null konvergieren, wenn sich h abnehmend, bzw. zunehmend der Null nähert, oder daß diese Ausdrücke durch h dividiert, über die Stelle $h = 0$ hinweg unbedingt integrabel sind, oder daß die Bedingungen unter 140) erfüllt sind.

144) Ausdehnung der Grenzen $a \cdots b$ ins Unendliche. Die Grenzen $a\,b$ können beliebig erweitert werden, wenn nur die darzustellende Funktion den allgemeinen oben aufgestellten Bedingungen Genüge leistet. Geht man aber mit den Zahlen $a\,b$ bzw. zu den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ über, so kommt noch die Bedingung hinzu, daß das Doppelintegral unbedingt ins Unendliche erstreckt werden darf. Diese Bedingung läßt sich jedoch etwas mildern. Es genügt bei dieser Untersuchung b ins Unendliche wachsen zu lassen.

Soll es gestattet sein, in der Formel $(a < 0,\ b > 0)$

$$\int_0^\infty d\mu \int_a^b \varphi(\lambda) \cos \lambda\mu \, d\lambda = \frac{1}{2}\pi[\varphi(+0) + \varphi(-0)]$$

mit b zur Grenze ∞ überzugehen, so muß das Integral

$$\int_0^\infty d\mu \int_\omega^{\omega'} \varphi(\lambda) \cos \lambda\mu \, d\lambda, \quad \omega' > \omega$$

beliebig klein werden, wenn ω groß genug genommen wird, wie groß auch $\omega' > \omega$ sein möge. Nun ist unser Integral gleich

$$\lim_{\omega''=\infty} \int_0^{\omega''} d\mu \int_\omega^{\omega'} \varphi(\lambda) \cos \lambda\mu \, d\lambda = \lim_{\omega''=\infty} \int_\omega^{\omega'} d\lambda \, \varphi(\lambda) \int_0^{\omega''} \cos \lambda\mu \, d\mu$$

$$= \lim_{\omega''=\infty} \int_\omega^{\omega'} \frac{\varphi(\lambda) \sin \omega'' \lambda \, d\lambda}{\lambda} < \int_\omega^{\omega'} \frac{abs\, \varphi(\lambda) \, d\lambda}{\lambda}.$$

Ist $abs\, \varphi(\lambda) : \lambda$ eine ins Unendliche integrabele Funktion, ist z. B. $\varphi(\lambda) = \psi(\lambda)\lambda^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, $\psi(\lambda)$ endlich, so wird dieser Ausdruck mit wachsendem ω beliebig klein. Also darf man in diesem Falle b ins Unendliche wachsen lassen. Unter ähnlichen Bedingungen kann man a negativ ins Unendliche wachsen lassen.

Diese Bedingungen des Verschwindens des Integrales

$$\lim_{\omega''=\infty} \int_\omega^{\omega'} \frac{\varphi(\lambda) \sin \omega'' \lambda \, d\lambda}{\lambda}$$

sind hinreichende, aber nicht notwendige. Konvergiert z. B. $\varphi(\lambda)$ für wachsende λ von einem bestimmten ω ab monoton gegen Null, so folgt aus dem zweiten Mittelwertsatze, daß der Grenzwert des Integrales Null ist. Dasselbe gilt auch für den Fall, daß sich $\varphi(\lambda)$ durch eine Summe zweier monoton gegen Null mit wachsenden λ konvergierende Funktionen zerlegen läßt.

Der Grenzwert des kritischen Integrales konvergiert schon gegen Null, wenn $\varphi(\lambda)$ monoton einer Konstanten zustrebt. Dann hat aber das Fouriersche Integral keinen Sinn, und die Bedingung, daß

$$\int_{-\omega}^{\infty} \varphi(\lambda) \cos \lambda\mu \, d\lambda$$

einen Sinn habe, läuft natürlich als oberste immer mit. Dies Integral ist eine Funktion von μ, wird sie für abnehmende μ unendlich groß, so wird das Fouriersche Integral immer noch vorhanden sein, wenn sie so unendlich wird, daß die Integration über μ bis $\mu = 0$ zulässig ist.

145) Komplexe Form des Fourierschen Integrales. Da der Kosinus eine gerade Funktion von μ ist, so kann man für das Fouriersche Integral schreiben:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a}^{b} f(\lambda)\cos\mu(\lambda-x)\,d\lambda\,d\mu.$$

Ersetzt man den Kosinus durch den Sinus, der eine ungerade Funktion ist, so folgt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a}^{b} f(\lambda)\sin\mu(\lambda-x)\,d\lambda\,d\mu = 0.$$

Addiert man das zweite Integral nach Multiplikation mit i zum ersten, so erhält man für das Fouriersche Integral die komplexe Form

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a}^{b} f(\lambda)e^{i\mu(\lambda-x)}\,d\lambda\,d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a}^{b} f(\lambda)e^{i\mu(x-\lambda)}\,d\lambda\,d\mu,$$

die zuweilen nützlich ist.

Beispiel. Will man für ein positives k und ein positives $a-1$ die Funktion

$$f(x) = e^{-kx}x^{a-1}, \quad x>0,$$
$$f(x) = 0, \qquad\quad x<0,$$

durch das Fouriersche Integral darstellen, so erhält man

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{i\mu(x-\lambda)-k\lambda}\lambda^{a-1}\,d\lambda\,d\mu.$$

Die Eulersche Formel

$$\int_{0}^{\infty} e^{-k\lambda}\lambda^{a-1}\,d\lambda = \Gamma(a):k^{a}$$

wird unter 158) für reelle positive k erwiesen werden. Wir nehmen vorauf, daß sie auch noch für komplexe k mit positiv reellem Teile gilt. Dadurch erhalten wir für positive x

$$e^{-kx}x^{a-1} = \frac{\Gamma(a)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\mu x}d\mu}{(k+i\mu)^{a}} = \frac{\Gamma(a)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\mu x}d\mu}{(k-i\mu)^{a}},$$

für negative x ist der Ausdruck Null. — Durch partielle Integration erweist man leicht, daß der Ausdruck richtig bleibt, wenn $0<a\leqq 1$ ist.

146) Darstellung gerader und ungerader Funktionen. Unter den ausgesprochenen Bedingungen ist also:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\cos\mu(\lambda-x)\,d\lambda\,d\mu$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\mu x\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\cos\lambda\mu\,d\lambda\,d\mu + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin\mu x\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\sin\lambda\mu\,d\lambda\,d\mu.$$

Ist $f(x)$ eine gerade Funktion, so ist das zweite Integral Null und man hat

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\mu x\int_0^\infty f(\lambda)\cos\lambda\mu\,d\lambda\,d\mu,$$

Ist $f(x)$ eine ungerade Funktion, so ist das erste Integral Null, und man hat

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\mu x\int_0^\infty f(\lambda)\sin\lambda\mu\,d\lambda\,d\mu.$$

147) Beispiele. Es sei $f(x) = 0$, wenn x außerhalb $-1\cdots 1$ liegt, in diesem Intervalle aber gleich Eins. Die Funktion ist gerade. Ihre Darstellung durch das Fouriersche Doppelintegral ist

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda x\int_0^1 \cos\lambda\mu\,d\mu\,d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda\cos\lambda x}{\lambda}\,d\lambda,$$

was wir schon unter 60) gefunden haben.

Es sei, k als positiv vorausgesetzt, $f(x) = e^{-kx}$ für positive x. Die Darstellung als gerade Funktion gibt

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda x\int_0^\infty e^{-k\mu}\cos\lambda\mu\,d\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{k\cos\lambda x}{k^2+\lambda^2}\,d\lambda = e^{-k\,\mathrm{abs}\,x}.$$

Die Darstellung als ungerade Funktion ergibt

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\lambda x\int_0^\infty e^{-k\mu}\sin\lambda\mu\,d\mu\,d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda\sin\lambda x}{\lambda^2+k^2}\,d\lambda = \begin{matrix} e^{-kx} & x>0 \\ -e^{kx} & x<0 \end{matrix}.$$

oder gleich

$$sgn\ x\cdot e^{-k\,\mathrm{abs}\,x}.$$

Für $x = 0$ ist das Integral Null. Durch Addition folgt

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{k\cos\lambda x+\lambda\sin\lambda x}{k^2+\lambda^2}\,d\lambda = e^{-kx},\quad x>0,$$

gleich $\frac{1}{2}$ für $x=0$, gleich 0 für $x<0$.

Es sei $f(x) = x^{-k}$, wo k zwischen Null und Eins liegt. Stellt man diese Funktion als gerade Funktion dar, $-f(x) = (abs\,x)^{-k}$ —, so hat man

$$(abs\,x)^{-k} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda x \int_0^\infty \mu^{-k}\cos\lambda\mu\, d\mu\, d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{k-1}\cos\lambda x\, d\lambda \cdot \int_0^\infty \nu^{-k}\cos\nu\, d\nu,$$

welche Formel durch die Substitution $\nu = \lambda\mu$ für μ erlangt wird. Da diese Substitution für $\lambda = 0$ keinen Sinn hat, so muß man die Integration über λ nicht bei 0, sondern bei ε beginnen, und dann mit ε zur Grenze Null übergehen, was keine Schwierigkeiten macht.

Die Darstellung derselben Funktion als einer ungeraden ergibt auf gleiche Weise

$$x^{-k} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\lambda x \int_0^\infty \mu^{-k}\sin\lambda\mu\, d\mu\, d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{k-1}\sin\lambda x\, d\lambda \cdot \int_0^\infty \nu^{-k}\sin\nu\, d\nu,$$

In diesen beiden Fällen ist also das Fouriersche Doppelintegral durch ein Produkt zweier einfacher Integrale dargestellt.

Für positive x liefern beide Darstellungen dasselbe. Setzt man $x = 1$, $k = \frac{1}{2}$, so folgt daraus

$$\frac{\pi}{2} = \left(\int_0^\infty \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 = \left(2\int_0^\infty \cos(\lambda^2)\, d\lambda\right)^2 = \left(\int_0^\infty \frac{\sin\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 = \left(2\int_0^\infty \sin(\lambda^2)\, d\lambda\right)^2,$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\infty \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \int_0^\infty \frac{\sin\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\infty \cos(\lambda^2)\, d\lambda = \int_0^\infty \sin(\lambda^2)\, d\lambda,$$

womit ein Desiderat unter 61) erledigt ist. Daß dem Sinusintegral das positive Vorzeichen zukommt, erkennt man nach schon angewandter Schlußweise durch Zerlegung des Intervalles in Teilintervalle von der Breite π, und daraus, daß $1 : \sqrt{\lambda}$ eine monotone abnehmende Funktion ist. Für das Kosinusintegral ist dieser Nachweis ein wenig umständlicher. Es ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \int_{\frac{3}{2}\pi}^\infty \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

Daß das Integral zwischen $\frac{3}{2}\pi \cdots \infty$ positiv ist, erkennt man in analoger Weise wie beim Sinusintegral. Es bleibt das Integral zu untersuchen

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

Es ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}} > \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}} > \sqrt{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$abs \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}} < \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{12}-2),$$

$$abs \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}} < \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot 1{,}469 < \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}} > \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{3}{2}\right), \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}} > -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Das Integral kann nicht $-\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ sein, muß also $=\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ sein.

Es sei $f(x) = abs\ sin\, x$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$, sonst sei $f(x) = 0$. Dann ist

$$abs\ sin\, x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\lambda x \int_0^{\pi} \sin\mu\, \cos\lambda\mu\, d\mu\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\lambda x \int_0^{\pi} \sin\mu(1+\lambda)\, d\mu\, d\lambda + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\lambda x \int_0^{\pi} \sin\mu(1-\lambda)\, d\mu\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda x[1-\cos\pi(1+\lambda)]\, d\lambda}{1+\lambda} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda x[1-\cos\pi(1-\lambda)]\, d\lambda}{1-\lambda}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda x(1+\cos\pi\lambda)\, d\lambda}{1-\lambda^2} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda x \cos^2\frac{1}{2}\pi\lambda\, d\lambda}{1-\lambda^2}.$$

Es ist zu empfehlen, noch einige Beispiele durchzuführen. Z. B $f(x) = sin\, x$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$, sonst $f(x) = 0$.

Es sieht beinahe wie eine Krähwinkelei aus, wenn man eine Funktion durch ein kompliziertes Integral darstellt, in dessen Integranden die darzustellende Funktion selbst wieder vorkommt. Indessen schon die angeführten Beispiele zeigen, wie solche Formen nützlich werden können.

Man ist aber auf diese Integrale durch Aufgaben der mathematischen Physik gekommen. Dort erweist sich gerade die Form dieser Gebilde als nützlich.

Die Fourierschen Doppelintegrale sind im allgemeinen keine eigentlichen Doppelintegrale, sondern sie sind als zwei aufeinanderfolgende Integrationen aufzufassen.

148) Ein unzureichendes Kriterium für die Vertauschbarkeit der Integrationsfolge. Aus dem Umstande, daß das Integral

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy$$

einen Sinn hat, wenn man $f(x, y)$ durch $abs\, f(x, y)$ ersetzt, darf man nicht folgern (vgl. Mertens, Crelles Journal, Bd. 63, S. 364), daß die Integrationsreihenfolge vertauscht werden kann. Es ist

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dy\, dx = 1,$$

wenn $f(x, y) = 1$ ist für rationale x, $f(x, y) = 2y$ für irrationale x. Hingegen hat das Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy$$

keinen Sinn.

Die Eulerschen Integrale.

149) Das Eulersche Integral erster Gattung scheint zuerst in der Form aufgetreten zu sein

$$\mathsf{B}(a, b) = \int_0^\infty x^{a-1}(1+x)^{-a-b}\, dx,$$

erstreckt zwischen den Grenzen Null und Unendlich. Damit es einen Sinn habe, müssen a und b, oder wenigstens ihre reellen Teile, positiv sein. Diese Bedingung läßt sich durch Abänderung des Integrations*weges* beseitigen, doch kann dies an jetziger Stelle nicht geschehen. In der angegebenen Form ist das Integral weniger einfach zu behandeln, als in der, die man durch die Substitution $1 + x = 1 : x'$ erzielt. Sie ergibt

$$\mathsf{B}(a, b) = \int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1}\, dx = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx = \mathsf{B}(b, a).$$

Durch die Substitution $x = \frac{1}{2}(1+y)$ erhält man

$$\mathsf{B}(a,b) = \frac{1}{2^{a+b-1}} \int_{-1}^{+1} (1-y)^{a-1}(1+y)^{b-1}\,dy$$

$$= \frac{1}{2^{a+b-1}} \left(\int_0^1 (1-x)^{a-1}(1+x)^{b-1}\,dx + \int_0^1 (1-x)^{b-1}(1+x)^{a-1}\,dx \right).$$

Setzt man $b = a$, so folgt

$$\mathsf{B}(a,a) = \frac{1}{2^{2a-2}} \int_0^1 (1-x^2)^{a-1}\,dx = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{\frac{1}{2}-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2^{2a-1}} \mathsf{B}\left(\frac{1}{2}, a\right).$$

Für $x = \cos\varphi$ erhält man

$$\mathsf{B}\left(\frac{1}{2}, a\right) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\varphi)^{2a-1}\,d\varphi, \quad \mathsf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

150) Ein bestimmtes Integral wird durch die B-Funktion ausgedrückt. Es ist

$$\mathsf{B}(a,b) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}},$$

$$2\,\mathsf{B}(a,b) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx.$$

Macht man im letzten Integral die Substitution $1:x$ für x, so folgt

$$\int_1^\infty \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx, \quad \mathsf{B}(a,b) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx.$$

Diese Gleichung war für $a+b=1$ schon Euler bekannt.

151) Benachbarte B-Funktionen. Unterscheiden sich zwei B-Funktionen in ihren Argumenten nur um ± 1, so nennen wir sie benachbarte. Zwischen solchen Funktionen bestehen einfache Beziehungen. Durch partielle Integration ergibt sich

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b\,dx = \frac{b}{a} \int_0^1 x^a (1-x)^{b-1}\,dx,$$

$$\mathsf{B}(a,b+1) = \frac{b}{a}\,\mathsf{B}(a+1,b),$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b\,dx = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx - \int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}\,dx,$$

$$\mathsf{B}(a,b+1) = \mathsf{B}(a,b) - \mathsf{B}(a+1,b) = \mathsf{B}(a,b) - \frac{a}{b}\mathsf{B}(a,b+1),$$

$$\mathsf{B}(a,b) = \frac{a+b}{a}\mathsf{B}(a+1,b) = \frac{a+b}{b}\mathsf{B}(a,b+1)$$
$$= \frac{a+b}{b}\cdot\frac{a+b+1}{b+1}\cdots\frac{a+b+n-1}{b+n-1}\cdot\mathsf{B}(a,b+n).$$

Setzt man hierin $b=0$, so folgt

$$\mathsf{B}(a,n) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n-1}{a\cdot a+1\cdot a+2\cdots a+n-1} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+a\cdot 1+\frac{a}{2}\cdots 1+\frac{a}{n-1}}.$$

Ferner ist

$$\mathsf{B}(1,b) = \int_0^1 x^{b-1}dx = 1:b, \quad \mathsf{B}(a,1) = 1:a.$$

Sind m und n ganze positive Zahlen, so ergeben sich noch leicht die Formeln

$$\mathsf{B}(a+n,b+m) = \frac{\mathsf{B}(a,b)\,a\cdot a+1\cdot a+n-1\cdot b\cdot b+1\cdots b+m-1}{a+b\cdot a+b+1\cdot a+b+2\cdots a+b+m+n-1},$$

$$\mathsf{B}(a+1,b+1) = \frac{a\cdot b}{a+b\cdot a+b+1}\cdot\mathsf{B}(a,b)$$

und (so lange die reellen Teile von $a-n$, $b-m$ positiv sind)

$$\mathsf{B}(a-n,b-m) = \frac{\mathsf{B}(a,b)\,a+b-1\cdot a+b-2\cdots a+b-n-m}{a-1\cdot a-2\cdots a-n\cdot b-1\cdot b-2\cdots b-m},$$

$$\mathsf{B}(a+n+m,b-m) = \frac{\mathsf{B}(a,b)\,a\cdot a+1\cdot a+2\cdots a+m+n-1}{b-1\cdot b-2\cdots b-m\cdot a+b\cdot a+b+1\cdots a+b+n-1}.$$

152) Grenzübergang zum Eulerschen Integrale zweiter Gattung. Unter 64) haben wir erwiesen, daß für wachsende n

$$lim\; n^{a+1}\mathsf{B}(a+1,b+1+n) = lim\int_0^n x^a\left(1-\frac{x}{n}\right)^{b+n}dx = \int_0^\infty x^a e^{-x}\,dx$$

sei. Das letzte Integral wird mit $\Gamma(a+1)$ oder *fac a* bezeichnet, und heißt Eulersches Integral zweiter Gattung. Durch partielle Integration

$$\int x^a e^{-x}\,dx = \frac{e^{-x}x^{a+1}}{a+1} + \frac{1}{a+1}\int x^{a+1}e^{-x}\,dx,$$

$$\int_0^\infty x^a e^{-x}\,dx = \frac{1}{a+1}\int_0^\infty x^{a+1}e^{-x}\,dx$$

ergibt sich die Fundamentaleigenschaft der Γ-Funktion oder der Fakultät

$$(a+1)\,fac\,a = fac(a+1), \quad a\,\Gamma(a) = \Gamma(a+1).$$

Aus der Eigenschaft

$$\mathsf{B}(a,b+n) = \frac{a+b+n}{a}\cdot\frac{a+b+n+1}{b+n}\,\mathsf{B}(a+1,b+n+1),$$

$$n^a\,\mathsf{B}(a,b+n) = \frac{1}{a}\cdot\frac{a+b+n}{n}\cdot\frac{a+b+n+1}{b+n}\,n^{a+1}\,\mathsf{B}(a+1,b+n+1)$$

ergibt sich durch Grenzübergang $n = +\infty$

$$lim\, n^a\,\mathsf{B}(a,b+n) = lim\int_0^n x^{a-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{b-1+n}dx$$

$$= \frac{1}{a}\,lim\int_0^n x^a\left(1-\frac{x}{n}\right)^{b+n}dx,$$

$$\frac{1}{a}\int_0^\infty x^a\,e^{-x}\,dx = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(a).$$

Hieraus folgt

$$lim\,\frac{n^a\,\mathsf{B}(a,b+n)}{n^a\,\mathsf{B}(a,b'+n)} = lim\,\frac{\mathsf{B}(a,b+n)}{\mathsf{B}(a,b'+n)} = 1.$$

Nun ist

$$\frac{\mathsf{B}(a,b)}{\mathsf{B}(a,1)} = a\,\mathsf{B}(a,b) = \frac{\frac{a+b}{b}\cdot\frac{a+b+1}{b+1}\cdots\frac{a+b+n-1}{b+n-1}}{\frac{a+1}{1}\cdot\frac{a+2}{1}\cdots\frac{a+n}{n}}\cdot\frac{\mathsf{B}(a,b+n)}{\mathsf{B}(a,1+n)},$$

$$\mathsf{B}(a,b) = \frac{a+b}{a\cdot b}\cdot\frac{1(a+b+1)}{(a+1)(b+1)}\cdots\frac{(n-1)(a+b+n-1)}{(a+n-1)(b+n-1)}\cdot\frac{n}{a+n}\,\frac{\mathsf{B}(a,b+n)}{\mathsf{B}(a,1+n)}.$$

Gehen wir mit n zur Grenze ∞ über, so erhalten wir das unendliche Produkt

$$\mathsf{B}(a,b) = \frac{a+b}{a\cdot b}\cdot\frac{1(a+b+1)}{a+1\cdot b+1}\cdot\frac{2(a+b+2)}{a+2\cdot b+2}\cdot\frac{3(a+b+3)}{a+3\cdot b+3}\cdots,$$

das, so lange a oder b nicht auf eine ganze negative Zahl oder auf Null fallen, überall konvergiert.

153) Darstellung der Fakultät durch ein unendliches Produkt. Es ist ($lim\, n = \infty$)

$$fac\,(x-1) = \Gamma(x) = lim\,\mathsf{B}(x,n)\,n^x$$

$$= lim\,\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x+2}\cdots\frac{n-1}{x+n-1}\cdot n^x$$

$$= lim\,\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x+1}\cdot\frac{3}{x+2}\cdots\frac{n}{x+n-1}\cdot n^{x-1}.$$

Dies ist kein eigentliches unendliches Produkt, aber Euler und Gauß haben ihm die Form eines solchen gegeben, in der Gestalt

$$\Gamma(x+1) = fac\, x = \frac{1^{1-x}\cdot 2^x}{x+1}\cdot\frac{2^{1-x}\cdot 3^x}{x+2}\cdots\frac{(n-1)^{1-x}\cdot n^x}{x+n-1}\cdots.$$

Es konvergiert für jeden von einer ganzen negativen Zahl verschiedenen Wert von x. Die Form, die heute durch Weierstraß für die Produktdarstellung die übliche ist,

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{fac\, x} = e^{Mx}\cdot\left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-x}\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(1+\frac{x}{3}\right)e^{-\frac{1}{3}x}\cdots,$$

hat den Vorzug, daß ihre einzelnen Faktoren Primfaktoren sind. Darin bedeutet M die bekannte Mascheronische oder Eulersche Konstante

$$M = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-lg\,[n+\lambda]\right) = 0{,}5772156649\cdots.$$

Aus der Produktdarstellung folgt nebenbei, daß $fac\, x$ oder $\Gamma(x)$ nirgends verschwindet.

154) Ein Satz aus der elementaren Funktionentheorie. Will man den Satz

$$\frac{1}{fac\, x-1\; fac-x} = \frac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi}$$

mit Mitteln, die die Lehre von den bestimmten Integralen gewährt, an dieser Stelle beweisen, so ist das mit einigen Weitläufigkeiten verknüpft. Sind erst Integrale zweigliedriger Differentiale, Integrale über komplexe Integrationswege eingeführt, so ist dies ein leichtes. Um aber diese Formel schon jetzt anwenden zu können, ziehen wir aus der elementaren Funktionentheorie die Produktdarstellung des Sinus heran. Nämlich die Formel

$$\frac{\sin x\pi}{\pi} = x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2}\right)\cdots,$$

sie liefert mit der Produktdarstellung der Fakultät ohne weiteres die angeschriebene Formel.

Für $x = \frac{1}{2}$ folgt hieraus

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = fac\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\,d\lambda = 2\int_0^\infty e^{-\lambda^2}\,d\lambda,$$

$$fac\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,fac\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

was eine neue Auswertung des Laplaceschen Integrales (122) bedeutet.

Wir notieren für ganzzahlige n die evidenten Formeln

$$\Gamma(1) = fac\, 0 = 1,\quad fac\, 1 = 1,\quad fac\, n = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n.$$

155) Darstellung der B-Funktion durch die Fakultät. Es ist

$$\mathsf{B}(a,b) = \frac{a+b}{a}\,\frac{a+b+1}{a+1}\cdots\frac{a+b+n-1}{a+n-1}\,\mathsf{B}(a+n,b)$$

$$= \frac{a+b}{a}\,\frac{\frac{a+b+1}{1}}{\frac{a+1}{1}}\cdot\frac{\frac{a+b+2}{2}}{\frac{a+2}{2}}\cdots\frac{\frac{a+b+n-1}{n-1}}{\frac{a+n-1}{n-1}}\,\frac{n^{-(a+b)}}{n^{-a}}\cdot n^{b}\,\mathsf{B}(a+n,b),$$

und wenn wir hierin mit n zur Grenze Unendlich übergehen

$$\mathsf{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{fac\,(a-1)\,fac\,(b-1)}{fac\,(a+b-1)}.$$

Dies ist die gesuchte Beziehung. Setzen wir $a+b=1$, $b=x$, so folgt

$$\mathsf{B}(1-x,x) = \Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = fac\,(-x)\,fac\,(x-1)$$

$$= \int_0^1 \lambda^{-x}(1-\lambda)^{x-1}\,d\lambda = \int_0^\infty \frac{\lambda^{x-1}}{1+\lambda}\,d\lambda = \int_0^1 \frac{\lambda^{x-1}+\lambda^{-x}}{1+\lambda}\,d\lambda = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

156) Das ganze lemniskatische Integral. In der Theorie der elliptischen Funktionen ist das von 0 bis 1 erstreckte Integral

$$K = K(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}}$$

von Wichtigkeit. Ist $k=i$, so läßt sich dasselbe durch Γ-Funktionen oder Fakultäten ausdrücken, und umgekehrt liefert die Theorie der elliptischen Funktionen zur Berechnung von $fac\,\frac{1}{4}$ ein brauchbares Mittel. Es ist

$$K(i) = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^4}} = \frac{1}{4}\int_0^1 \lambda^{-\frac{3}{4}}(1-\lambda)^{-\frac{1}{2}}\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{fac\,-\frac{3}{4}\cdot fac\,-\frac{1}{2}}{fac\,-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}\,fac\,\frac{1}{4}}{fac\,-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,fac\,\frac{1}{4}\,fac\,\frac{1}{4}}{fac\,\frac{1}{4}\,fac\,-\frac{1}{4}} = \frac{4\sqrt{\pi}\,fac\,\frac{1}{4}\,fac\,\frac{1}{4}}{fac\,\frac{1}{4}-1\,fac\,-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{4\sqrt{\pi}\,fac\,\frac{1}{4}\,fac\,\frac{1}{4}\,\sin\frac{1}{4}\pi}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,fac^2\,\frac{1}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{2}\sqrt{\pi}},$$

$$fac^2\,\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,K(i),\quad \Gamma^2\left(\tfrac{1}{4}\right) = 4\sqrt{2\pi}\,K(i).$$

Um hieraus zu einer Berechnungsformel für $fac\frac{1}{4}$ zu gelangen, transformieren wir das Integral $K(i)$. Zunächst ersetzen wir λ^2 durch λ und erhalten

$$2K(i) = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1+\lambda)}}.$$

Sodann machen wir die Substitution

$$\lambda = \frac{2-\mu}{\mu} = \frac{2\left(1-\frac{1}{2}\mu\right)}{\mu}, \quad d\lambda = -\frac{2d\mu}{\mu\mu},$$
$$1-\lambda = \frac{2(\mu-1)}{\mu}, \quad 1+\lambda = \frac{2}{\mu},$$

so ergibt sich

$$2K(i) = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1+\lambda)}} = \int_1^2 \frac{d\mu}{\sqrt{2}\sqrt{\mu(\mu-1)\left(1-\frac{1}{2}\mu\right)}}.$$

Substituieren wir weiter

$$\mu = 2-\lambda = 2\left(1-\tfrac{1}{2}\lambda\right), \quad \mu-1 = 1-\lambda, \quad 1-\tfrac{1}{2}\mu = \tfrac{1}{2}\lambda,$$

so folgt

$$2K(i) = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda(1-\lambda)\left(1-\frac{1}{2}\lambda\right)}} = \sqrt{2}\,K\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right),$$

$$K\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = \sqrt{2}\,K(i) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,fac^2\left(\tfrac{1}{4}\right),$$

$$fac\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{\pi}\sqrt{K\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)} = \sqrt[4]{\pi}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2K\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{\pi}} : 2\sqrt{2}.$$

Dieser Ausdruck gibt aber nach Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen (siehe meine Formelsammlung XIII, 5)

$$fac\tfrac{1}{4} = \frac{\sqrt[4]{\pi^3}}{\sqrt{2}+1}\left(1+2e^{-4\pi}+2e^{-16\pi}+2e^{-36\pi}\ldots\right).$$

Da $e^{-16\pi}$ eine sehr kleine Größe ist, so genügen meist die beiden ersten Glieder der Reihe zur Berechnung von $fac\frac{1}{4}$.

Ebenso läßt sich das ganze lemniskatische Integral zweiter Gattung durch $fac\frac{1}{4}$ ausdrücken. Es ist

$$E(i) = \int_0^1 \sqrt{1-\lambda^4}\, d\lambda = \frac{1}{4}\int_0^1 \lambda^{-\frac{3}{4}}(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\, d\lambda$$

$$= \frac{fac\frac{1}{4}\; fac\frac{1}{2}}{fac\frac{3}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\, fac^2\frac{1}{4}.$$

157) Formel von Gauß. Mit Hilfe der Produktdarstellung und der Gleichung

$$\sin\frac{\pi}{m}\cdot\sin\frac{2\pi}{m}\cdot\sin\frac{3\pi}{m}\cdots\sin\frac{(m-1)\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}}$$

findet man für ganze m

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(\frac{1}{m}+x\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}+x\right)\cdots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}+x\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\, m^{\frac{1}{2}-mx}\,\Gamma(mx),$$

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\,\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

158) Nochmals die Beziehung zwischen der B-Funktion und Γ-Funktion. Die Beziehung 155) soll mit den Mitteln der Theorie der bestimmten Integrale gefunden werden. Es ist für ein positives k, wie die Substitution kx für x im Eulerschen Integrale zweiter Gattung ergibt,

$$\frac{\Gamma(b)}{k^b} = \int_0^\infty e^{-kx}x^{b-1}\, dx, \quad \frac{1}{k^b} = \frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^\infty e^{-kx}x^{b-1}\, dx.$$

Setzen wir $1+y$ für k, $a+b$ für b, so folgt

$$(1+y)^{-a-b} = \int_0^\infty e^{-x-yx}x^{a+b-1}\, dx : \Gamma(a+b),$$

$$\int_0^\infty \frac{y^{b-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy = \frac{1}{\Gamma(a+b)}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-yx}x^{a+b-1}y^{b-1}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a+b)}\int_0^\infty e^{-x}x^{a+b-1}\int_0^\infty e^{-yx}y^{b-1}\, dx\, dy$$

$$= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Diese Methode, die die Vertauschbarkeit der Integrationsfolge voraussetzt, auf ihre Strenge zu prüfen, unterlasse ich, weil das Resultat ja schon sichergestellt ist.

159) Die Ableitung der Fakultät. Formell ergibt sich durch Differentiation

$$fac'(x-1) = \Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda} lg\,\lambda\, \lambda^{x-1} d\lambda.$$

Da aber der Differentialquotient des Integranden an den Grenzen des Integrationsintervalles ins Unendliche wächst, so muß die Zulässigkeit der Differentiation unter dem Integralzeichen besonders erwiesen werden. Wir setzen

$$P(x) = \int_0^1 e^{-\lambda} \lambda^{x-1} d\lambda, \quad Q(x) = \int_1^\infty e^{-\lambda} \lambda^{x-1} d\lambda, \quad \Gamma(x) = P(x) + Q(x),$$

und weisen zuerst die Differenzierbarkeit von $Q(x)$ nach. Dabei kann x eine beliebige Zahl sein. Es ist

$$Q(x) = \lim_{\omega=\infty} \int_1^\omega e^{-\lambda} \lambda^{x-1} dx,$$

$$\frac{Q(x+h) - Q(x)}{h} = \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{h} \int_1^\omega e^{-\lambda} \lambda^{x-1} (\lambda^h - 1) d\lambda,$$

$$\lambda^h - 1 = e^{h lg \lambda} - 1 = h\, lg\,\lambda + \frac{h^2 (lg\,\lambda)^2}{1 \cdot 2} + \frac{h^3 (lg\,\lambda)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

$$= h\, lg\,\lambda + \frac{h^2 (lg\,\lambda)^2}{1 \cdot 2} \left(1 + \frac{h\, lg\,\lambda}{3} + \frac{h^2 (lg\,\lambda)^2}{3 \cdot 4} + \frac{h^3 (lg\,\lambda)^3}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots\right).$$

Der absolute Betrag der Klammer ist, wenn $abs\, h = k$ gesetzt wird, kleiner als $e^{k lg \lambda}$, so daß man setzen kann

$$\lambda^h - 1 = h\, lg\,\lambda + \frac{h^2 (lg\,\lambda)^2}{2} e^{k lg \lambda}\, \theta,$$

worin $abs\, \theta < 1$ ist. Daraus folgt

$$\frac{Q(x+h) - Q(x)}{h} = \lim_{\omega=\infty} \int_1^\omega e^{-\lambda} \lambda^{x-1} lg\,\lambda\, d\lambda + \frac{1}{2} h \int_1^\omega e^{-\lambda + k lg \lambda} \lambda^{x-1} (lg\,\lambda)^2\, \theta\, d\lambda.$$

Nun ist, wenn $\lambda > 1$ ist, $-\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} lg\,\lambda$ stets negativ, und wenn $k < \frac{1}{2}$ ist, a fortiori $-\frac{1}{2}\lambda + k\, lg\,\lambda$ stets negativ. Es wird deshalb

$$e^{-\lambda + k lg \lambda} = e^{-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\lambda + k lg \lambda}$$

für wachsende λ rascher unendlich klein als $e^{-\frac{1}{2}\lambda}$, woraus folgt, daß das letzte Integral einen bestimmten endlichen Grenzwert hat, wenn ω über alle Grenzen wächst, und es ergibt sich für $lim\, h = 0$

$$Q'(x) = \lim_{h=0} \frac{Q(x+h) - Q(x)}{h} = \int_1^\infty e^{-\lambda} \lambda^{x-1} lg\, \lambda\, d\lambda$$

unabhängig von *arc h*, was ein Kennzeichen dafür ist, daß $Q(x)$ eine analytische Funktion ist und nach der Theorie der analytischen Funktionen in eine beständig konvergente Potenzreihe entwickelt werden kann, daß also $Q(x)$ eine ganze transzendente Funktion ist.

Herr Prym hat in Crelles Journal Bd. 82 diese Funktion des weiteren untersucht und gefunden, daß $Q(x+1) = xQ(x) + (1:e)$ ist.

Bei der Untersuchung der Differenzierbarkeit von $P(x)$ setzen wir der Bequemlichkeit halber voraus, daß $\Re(x) > 1$ sei. Wir schreiben

$$\frac{P(x+h) - P(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^1 e^{-\lambda} \lambda^{x-1} (\lambda^h - 1)\, dx$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^{k^2} e^{-\lambda} \lambda^{x-1} (\lambda^h - 1)\, dx + \frac{1}{h} \int_{k^2}^1 e^{-\lambda} \lambda^{x-1} (\lambda^h - 1)\, d\lambda.$$

Der erste Teil dieses Ausdruckes, in dem wieder $k = abs\, h$ ist,

$$\frac{1}{h} \int_0^{k^2} e^{-\lambda} \lambda^{x-1} (\lambda^h - 1)\, d\lambda$$

ist, weil $\Re(x-1)$ positiv angenommen ist, nach dem ersten Mittelwertsatze gleich $\xi k^2 : h$, wo ξ eine endliche (komplexe) Zahl ist. Dieser Teil verschwindet deshalb mit h. Der zweite Teil des Ausdruckes

$$\frac{1}{h} \int_{k^2}^1 e^{-\lambda} \lambda^{x-1} (\lambda^h - 1)\, d\lambda$$

ist unter Anwendung des oben gegebenen Ausdruckes für $\lambda^h - 1$ in der Form darstellbar

$$\int_{k^2}^1 e^{-\lambda} \lambda^{x-1} lg\, \lambda\, d\lambda + h \int_{k^2}^1 e^{-\lambda + k lg \lambda} \lambda^{x-1} (lg\, \lambda)^2 \theta\, d\lambda,$$

wo wieder $abs\, \theta < 1$ ist. Der Grenzwert des ersten Integrales dem absoluten Betrage nach für abnehmende h ist

$$\int_0^1 e^{-\lambda} \lambda^{x-1} lg\, d\lambda.$$

Im Integral des zweiten Teiles ist $k\, lg\, \lambda$ negativ, so daß die Exponentialfunktion fortwährend ein echter Bruch ist. Das Integral des zweiten Teiles ist demnach für jedes noch so kleine h eine endliche Zahl,

und der zweite Teil nähert sich mit abnehmenden h der Grenze Null. Somit ist erwiesen, daß

$$P'(x) = \int_0^1 e^{-\lambda} \lambda^{x-1} lg\, \lambda\, d\lambda$$

ist und durch Addition der Ableitungen von P und Q ergibt sich

$$\Gamma'(x) = fac'(x-1) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{x-1} lg\, \lambda\, d\lambda.$$

Daß dieser Satz noch richtig bleibt, wenn nur $\Re(x) > -1$ ist, ergibt sich durch partielle Integration. Nachdem die Beweismethode dargelegt ist, wird man in ähnlichen Fällen die Differentiation unter dem Integralzeichen sorgloser anwenden dürfen. Namentlich folgt daraus, daß auch für die höheren Differentialquotienten

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{x-1} (lg\, \lambda)^n\, d\lambda$$

gesetzt werden darf.

160) Die Funktion $\Gamma(x)$ besitzt als Funktion der reellen Veränderlichen x zwischen $x = 1$ und $x = 2$ ein und nur ein Minimum. Schreibt man

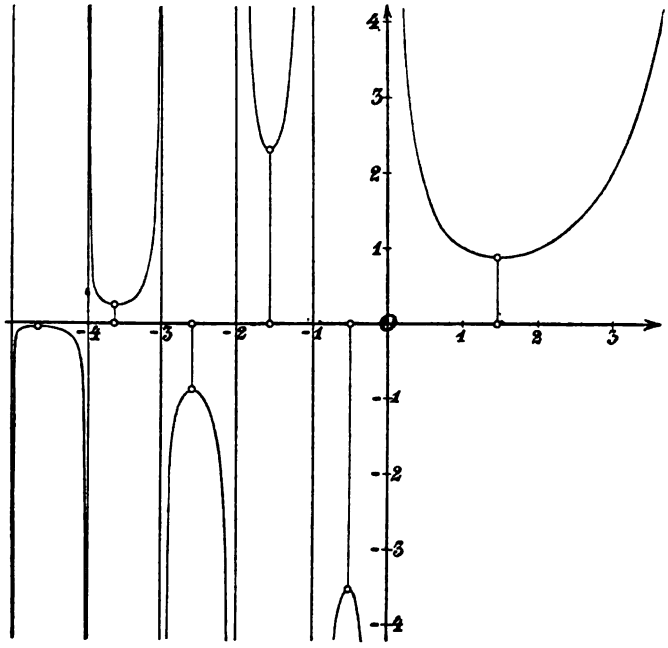
$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{x-1} lg\, \lambda\, d\lambda = \int_1^\infty e^{-\lambda} \lambda^{x-1} lg\, \lambda\, d\lambda - \int_0^1 e^{-\lambda} \lambda^{x-1} lg \frac{1}{\lambda}\, d\lambda,$$

so wächst das erste der beiden letzten Integrale monoton mit x, das zweite nimmt monoton ab, $\Gamma'(x)$ wächst monoton von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn x von 0 bis ∞ zunimmt. Mithin geht diese Funktion in diesem Intervalle nur einmal, und zwar vom Negativen zum Positiven, durch Null, $\Gamma(x)$ hat in demselben nur ein Minimum. Da

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} < 1$$

ist, so muß das Minimum im Intervalle $1 \cdots 2$ liegen. Nach einer Tafel von Gauß Bd. III S. 161 findet das Minimum zwischen 1,46 und 1,47 statt, und ist nur wenig kleiner als $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Für die Kurve $y = \Gamma(x)$ hat schon Bessel eine graphische Darstellung gegeben. Will man diese auch für negative x gewinnen, so hat man die durch das Integral definierte Funktion mittels der Gleichung $\Gamma(x) = \pi : \Gamma(1-x)\, sin\, \pi x$ für negative x fortzusetzen. Die Kurve $y = \Gamma(x)$ liegt für negative x in Intervallen von der Breite Eins abwechselnd ganz oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse,

für ganzzahlige x von $+\infty$ nach $-\infty$ überspringend. In jedem solchen Intervalle liegt ein Maximum bzw. Minimum von $\Gamma(x)$, deren Werte für entferntere x der Null immer näher kommen. Die Werte von x, an denen die Maxima bzw. Minima statt haben, nähern sich für wachsende ganze n immer mehr den Zahlen $-n-1+(1:lg\,n)$, wie Hermite in Crelles Journal Bd. 90 gezeigt hat.



$y = \Gamma(y)$.

161) Die Funktion $\Psi(x)$. Gauß bezeichnet die Funktion

$$d\,lg\,fac\,x : dx$$

mit $\Psi(x)$. Neuere Autoren bezeichnen $d\,lg\,\Gamma(x) : dx$ mit demselben Zeichen. Um der hieraus fließenden Unbestimmtheit zu entgehen, wollen wir den logarithmischen Differentialquotienten von $\Gamma(x)$ mit $lg'\,\Gamma(x)$ bezeichnen. Aus den Darstellungen der Gammafunktion ergibt sich durch logarithmische Differentiation der einzelnen Faktoren

$$lg'\,\Gamma(x) = -M + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x+2}\right) + \cdots$$

$$= \lim_{n=\infty} \left(lg\,n - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \cdots - \frac{1}{x+n}\right),$$

$$lg'\,\Gamma(1) = -M, \quad lg'\,\Gamma(1-x) - lg'\,\Gamma(x) = \pi\,ctg\,\pi x,$$

$$lg'\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = lim \begin{Bmatrix} lg\,n - \frac{2}{1} - \frac{2}{3} - \cdots - \frac{2}{2n+1} \\ -1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n} \end{Bmatrix}$$

$$= lim\left(lg\,n - 1 - \tfrac{1}{2} - \cdots - \tfrac{1}{n}\right) - 2\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - + \cdots + \tfrac{1}{2n+1}\right),$$

$$lg'\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = -M - 2\,lg\,2,$$

$$lg'\,\Gamma(y) - lg'\,\Gamma(y) = (x-y)\sum_m \frac{1}{(m+x)(m+y)}$$

ist stets positiv, wenn $x > y$ ist. Ferner ergibt sich

$$lg'\,\Gamma(\alpha+\beta i) - lg'\,\Gamma(\alpha-\beta i) = 2i\beta \sum \frac{1}{(\alpha+m)^2+\beta^2},$$

wo die Summe über alle Zahlen $m = 0, 1, 2, \cdots$ zu erstrecken ist. Es folgt daraus, daß die Funktion $lg'\,\Gamma(x)$ nur *reelle* Nullstellen haben kann, und da $\Gamma(x)$ nirgends verschwindet, so kann auch $\Gamma'(x) = \Gamma(x)\,lg'\,\Gamma(x)$ nur reelle Nullstellen haben. Diesen Nullstellen entsprechen die Maxima und Minima von $\Gamma(x)$.

Auch zwischen zwei aufeinanderfolgenden negativen ganzen Zahlen ist $lg'\,\Gamma(x)$ monoton, nimmt von $+\infty$ bis $-\infty$ ab, und wechselt sein Zeichen einmal und nur einmal, so daß $\Gamma'(x)$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen negativen Zahlen einmal und nur einmal verschwindet, $\Gamma(x)$ nur ein Max. oder Min. hat.

162) **Integraldarstellung von $lg'\,\Gamma(x)$.** Das Eulersche Integral geht durch die Substitution $-lg\,\lambda$ für λ in die Form über

$$\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{x-1}d\lambda = \int_0^1 \left(lg\tfrac{1}{\lambda}\right)^{x-1}d\lambda.$$

Nun ist

$$\frac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h}\frac{\Gamma(h)}{\Gamma(h)} = \frac{\Gamma(x+h)\,\Gamma(h)}{\Gamma(h+1)} - \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(h)}{\Gamma(h+1)} = \frac{\Gamma(x+h)\,\Gamma(h)}{\Gamma(h+1)} - \frac{B(x,h)\,\Gamma(x+h)}{\Gamma(h+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(x+h)}{\Gamma(h+1)}\left(\int_0^1 \left[lg\tfrac{1}{\lambda}\right]^{h-1}d\lambda - \int_0^1 \lambda^{x-1}(1-\lambda)^{h-1}d\lambda\right)$$

$$= \frac{\Gamma(x+h)}{\Gamma(h+1)}\int_0^1 \left(\left[lg\tfrac{1}{\lambda}\right]^{h-1} - \lambda^{x-1}(1-\lambda)^{h-1}\right)d\lambda.$$

Vorausgesetzt, daß man hier mit h zur Grenze Null übergehen darf, ergibt sich

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x)\int_0^1 \left(\frac{1}{lg\frac{1}{\lambda}} - \frac{\lambda^{x-1}}{1-\lambda}\right) d\lambda, \quad lg'\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{lg\frac{1}{\lambda}} - \frac{\lambda^{x-1}}{1-\lambda}\right) d\lambda.$$

Um den Grenzübergang zu rechtfertigen, der Integrand erscheint an der Stelle $\lambda = 1$ in unbestimmter Form, ist nachzuweisen, daß er für $\lambda = 1$ einen bestimmten endlichen Wert hat. Setzt man $\lambda = 1 - \varepsilon$ und entwickelt den Integranden für $h = 0$ nach Potenzen von ε, so findet man, daß sich derselbe einem bestimmten endlichen Werte für abnehmende ε nähert.

163) Dirichlets Integraldarstellung von $lg'\Gamma(x)$. Es ist

$$\frac{\Gamma(x)}{k^x} = \int_0^\infty e^{-k\lambda}\lambda^{x-1} dx, \quad lg\, k = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda} - e^{-k\lambda}}{\lambda} d\lambda.$$

Die zweite Formel erhält man aus der ersten für $x = 1$ durch Integration nach k. Daraus folgt

$$\int_0^\infty e^{-k} k^{x-1} lg\, k\, dk = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left(e^{-\lambda}\int_0^\infty e^{-k} k^{x-1} dk - \int_0^\infty e^{-(1+\lambda)k} k^{x-1} dk\right),$$

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x)\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left(e^{-\lambda} - \frac{1}{(1+\lambda)^x}\right), \quad lg'\Gamma(x) = \int_0^\infty \left(e^{-\lambda} - \frac{1}{(1+\lambda)^x}\right)\frac{d\lambda}{\lambda},$$

und wenn man λ für $1:(1+\lambda)$ substituiert

$$lg'\Gamma(x) = \int_0^1 \left(e^{1-\frac{1}{\lambda}} - \lambda^x\right)\frac{d\lambda}{\lambda(1-\lambda)}.$$

Hieraus zieht man leicht die Eulersche Beziehung

$$\int_0^1 (1-\lambda)^{x-1}\lambda^{y-1} lg\,\lambda\, d\lambda = -\,\mathrm{B}(x,y)\int_0^1 \frac{\lambda^{y-1}(1-\lambda^x)}{1-\lambda} d\lambda.$$

Es ist nämlich

$$\frac{\partial \mathrm{B}(x,y)}{\partial y} = \int_0^1 (1-\lambda)^{x-1}\lambda^{y-1} lg\,\lambda\, d\lambda,$$

$$\frac{\partial\, lg\, B(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\, lg\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = lg'\,\Gamma(y) - lg'\,\Gamma(x+y)$$

$$= \int_0^1 \frac{\lambda^{x+y-1} - \lambda^{y-1}}{1-\lambda}\, d\lambda = \int_0^1 \frac{\lambda^{y-1}\,(\lambda^x - 1)}{1-\lambda}\, d\lambda,$$

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial y} = -\,B(x,y) \int_0^1 \frac{\lambda^{y-1}(1-\lambda^x)}{1-\lambda}\, d\lambda.$$

164) Integraldarstellung von $lg\,\Gamma(x)$. Aus der Integraldarstellung unter 163) erhält man, wenn man λ durch $e^{-\lambda}$ ersetzt

$$lg'\,\Gamma(x) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left(e^{-\lambda} - \frac{\lambda e^{-\lambda(x-1)}}{e^\lambda - 1}\right),$$

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left(e^{-\lambda} - e^{-\lambda x} + \frac{\lambda e^{-x\lambda}}{2}\right) = lg\, x + \frac{1}{2x},$$

$$lg'\,\Gamma(x+1) - lg\, x - \frac{1}{2x} = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left(e^{-\lambda} - \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^\lambda - 1} - e^{-\lambda} + e^{-x\lambda} - \frac{\lambda e^{-x\lambda}}{2}\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{-x\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{e^\lambda - 1} - \frac{1}{2}\right) d\lambda = lg'\, fac\, x.$$

Integriert man über x, so folgt

$$lg\,\Gamma(x+1) = lg\, fac\, x = C + \frac{1}{2}\, lg\, x + x(lg\, x - 1) + \int_0^\infty e^{-x\lambda}\left(\frac{1}{e^\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Die Konstante C könnte man aus einer Stirlingschen Formel finden, die aber gerade erst abgeleitet werden soll. Deshalb setzen wir mit Stern $x = \frac{1}{2}$. Dann ist, wenn das letzte Integral mit $J(x)$ bezeichnet wird, und wenn man für λ 2λ substituiert

$$J\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda}\left(\frac{1}{e^{2\lambda} - 1} - \frac{1}{2\lambda} + 1 - \frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left(\frac{e^\lambda}{e^{2\lambda} - 1} - \frac{e^{-\lambda}}{2\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{2}\right)$$

$$= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left(\frac{1}{e^\lambda - 1} - \frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda}}{\lambda}\right) - \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left(\frac{1}{e^{2\lambda} - 1} - \frac{e^{-\lambda}}{2\lambda}\right)$$

$$+ \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{2}\right),$$

und da das erste und zweite Integral einander gleich sind

$$J\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda} - e^{-\lambda}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} lg \frac{1}{2},$$

$$C = -\frac{1}{2} lg \frac{1}{2} + \frac{1}{2} lg \pi = \frac{1}{2} lg 2\pi.$$

Man erhält den Wert des letzten Integrales, wenn man die Gleichung

$$lg\, x = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda} - e^{-x\lambda}}{\lambda} d\lambda.$$

nach x zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}$ und 1 integriert.

Somit ergibt sich

$$lg\,\Gamma(1+x) = lg\, fac\, x$$
$$= \frac{1}{2} lg\, 2\pi x + x(lg\, x - 1) + \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-x\lambda} d\lambda}{\lambda}.$$

165) Die Stirlingsche asymptotische Formel. Das Integral der letzten Formel verschwindet, wenn der reelle Teil von x positiv über alle Grenzen wächst. Schreiben wir dafür ε_x, so fließt aus der letzten Formel

$$lg\, fac\, x = \frac{1}{2} lg\, 2\pi x + x(lg\, x - 1) + \varepsilon_x, \quad fac\, x = \sqrt{2\pi x}\, e^{x(lg\, x - 1)} e^{\varepsilon_x},$$

wo ε_x verschwindet, wenn der reelle Teil von x positiv über alle Grenzen wächst.

Diese asymptotische Formel und eine solche für $lg'\, fac\, x$ wird vielleicht besser aus der Produkt-, bzw. Partialbruchdarstellung hergeleitet. Jedenfalls findet man aus dieser Darstellung leichter, daß die Ausdrücke

$$fac\, x = \sqrt{2\pi x} \cdot e^{x(lg\, x - 1)} \cdot e^{\frac{1}{12 \cdot x} - \frac{1}{12 \cdot 30 \cdot x^3} + \frac{\varepsilon_x}{x^5}},$$

$$lg'\, fac\, x = lg\, x - \frac{1}{12 \cdot x^2} + \frac{1}{120 \cdot x^4} + \frac{\eta_x}{x^6},$$

in denen $\varepsilon_x\, \eta_x$ mit wachsenden x gegen endliche Zahlen konvergieren, gelten, wenn nur x sehr weit von der negativ reellen Achse entfernt ist, z. B. sehr groß rein imaginär ist.

166) Die Raabesche Gleichung. Es werde

$$\int_0^1 lg\,\Gamma(x+k)\, dx = F(k)$$

gesetzt, so folgt

$$\frac{dF}{dk} = \int_0^1 \frac{d\lg\Gamma(x+k)}{dk}\,dx = \int_0^1 \frac{d\lg\Gamma(x+k)}{dx}\,dx = \lg\Gamma(1+k) - \lg\Gamma(k) = \lg k,$$

und durch Integration nach k

$$F(k) = k(\lg k - 1) + C = \int_0^1 \lg\Gamma(x+k)\,dx.$$

Für sehr große Werte von k erhalten wird nach der Stirlingschen Formel

$$F(k) = \int_0^1 \Big(\tfrac{1}{2}\lg 2\pi + \tfrac{1}{2}\lg(x+k-1) + (x+k-1)\lg(x+k-1) - (x+k-1) + \varepsilon_k\Big)\,dx,$$

wo ε_k mit wachsendem k beliebig klein wird. Es folgt hieraus weiter

$$F(k) - \tfrac{1}{2}\lg 2\pi = \int_0^1 \Big(\tfrac{1}{2}\lg\frac{x+k-1}{k} + \tfrac{1}{2}\lg k + (x-1+k)\lg\frac{x-1+k}{k} + (x-1+k)\lg k - x - k + 1 + \varepsilon_k\Big)\,dx.$$

Beachtet man, daß für sehr große k

$$\lg\frac{(x-1+k)}{k}, \quad (x-1)\lg\frac{x-1+k}{k}$$

beliebig klein werden und deshalb in ε_k eingerechnet werden dürfen, so findet man

$$F(k) - \tfrac{1}{2}\lg 2\pi = \int_0^1 \Big(\tfrac{1}{2}\lg k + k\lg\frac{x-1+k}{k} + (x-1+k)(\lg k - 1) + \varepsilon_k\Big)\,dx.$$

Endlich kann man noch bis auf eine in ε_k einzurechnende kleine Größe

$$k\lg\frac{k+x-1}{k} = x - 1$$

setzen, so daß folgt

$$F(k) - \tfrac{1}{2}\lg 2\pi = \int_0^1 \Big(\tfrac{1}{2}\lg k + (x-1) + (x-1+k)(\lg k - 1) + \varepsilon_k\Big)\,dx.$$

Nun ist die Integration nach x unmittelbar ausführbar. Es ist

$$F(k) = \tfrac{1}{2}\lg 2\pi + k(\lg k - 1) + \delta_k,$$

und dies muß gleich $k(\lg k - 1) + C$ sein. Dies gilt für jedes hinreichend

große k, demnach ist $C = \frac{1}{2} lg\, 2\pi$, und man erhält die **Raabesche Formel**

$$\int_0^1 lg\,\Gamma(x+k)\,dx = \frac{1}{2}\, lg\, 2\pi + k(lg\, k - 1).$$

167) **Integraldarstellung der reziproken B-Funktion.** Das Integral

$$F(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{(k+\lambda i)^a (k-\lambda i)^b}$$

hat einen Sinn, wenn $a + b > 1$ ist. Wir wollen aber vorläufig annehmen, daß a und b beide größer als Eins seien. Ersetzen wir darin

$$\frac{1}{(k+\lambda i)^a} \quad \text{durch} \quad \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-(k+\lambda i)\mu}\, \mu^{a-1}\, d\mu,$$

so erhalten wir

$$F(a,b) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(k+\lambda i)\mu}\, \mu^{a-1}}{(l-\lambda i)^b}\, d\mu\, d\lambda,$$

und da sich unter den gemachten Voraussetzungen die Integrationsfolge vertauschen läßt

$$F(a,b) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-k\mu}\, \mu^{a-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\mu i}\, d\lambda}{(l-\lambda i)^b}\, d\mu$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-k\mu}\, \mu^{a-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda\mu i}\, d\lambda}{(l+\lambda i)^b}\, d\mu.$$

Das innere Integral ist nach einer im § 145 gefundenen Formel für negative μ Null, für positive gleich

$$\frac{2\pi}{\Gamma(b)}\, e^{-l\mu}\, \mu^{b-1},$$

woraus folgt

$$F(a,b) = \frac{2\pi}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^{\infty} e^{-(k+l)\mu}\, \mu^{a+b-2}\, d\mu = \frac{2\pi}{(k+l)^{a+b-1}} \cdot \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

$$= \frac{2\pi}{(k+l)^{a+b-1}\, B(a,b)\,(a+b-1)}.$$

Die Ausdehnung des Gültigkeitsbereiches der erhaltenen Formel auf die Fälle, in denen nur $a + b > 1$ ist, kann durch partielle Integration erreicht werden.

168) Setzen wir im Integral $F(a, b)$ $l = k$ und beachten, was stillschweigend vorausgesetzt wurde, daß für die Potenzen der Hauptwert zu nehmen sei, daß also

$$(k+\lambda i)^a = (k^2+\lambda^2)^{\frac{a}{2}} e^{arc\,(k+\lambda i)} = (k^2+\lambda^2)^{\frac{a}{2}} e^{a\,arctg\,\frac{\lambda}{k}},$$

$$(k-\lambda i)^b = (k^2+\lambda^2)^{\frac{b}{2}} e^{-b\,arctg\,\frac{\lambda}{k}} = (k^2+\lambda^2)^{\frac{b}{2}} e^{-b\vartheta}$$

ist, wo ϑ für $arctg\,\frac{\lambda}{k}$ gesetzt ist, und ϑ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, so gewinnen wir die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(b-a)\vartheta i}\,d\lambda}{(k^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}(a+b)}} = \frac{2\pi}{(2k)^{a+b-1}} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)},$$

die durch Spaltung in ihren reellen und imaginären Teil zwei neue liefert. Nehmen wir noch $k = 1$ an und führen ϑ als Integrationsvariabele ein $\lambda = tg\,\vartheta$, so folgt

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos(b-a)\vartheta\,\cos^{a+b-2}\vartheta\,d\vartheta = \frac{\pi\,\Gamma(a+b-1)}{2^{a+b-2}\,\Gamma(a)\,\Gamma(b)}.$$

Diese Formel ist in der Theorie der Besselschen Funktionen brauchbar. Ersetzt man noch a, b durch $a+1$, $b+1$, so folgt

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{a+b}\vartheta\,\cos(b-a)\vartheta\,d\vartheta = \frac{\pi\,\Gamma(a+b+1)}{2^{a+b+1}\,\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)}.$$

Integration zweigliedriger Differentiale.

Die Integration vollständiger Differentiale ist an sich von großer Bedeutung. Auf die Integration von Funktionen einer komplexen Veränderlichen angewandt liefert sie auch neue Gesichtspunkte und Hilfsmittel für die Auswertung gewöhnlicher Integrale, so daß auch aus diesem Grunde ein Eingehen auf diese Formen notwendig ist.

169) Das zweigliedrige Differential. Wenn sich der Ausdruck

$$\frac{w(x+h\cos\varphi,\ y+h\sin\varphi)}{h}$$

für abnehmende h einem bestimmten Grenzwert nähert, so nennen wir denselben den in der Richtung φ genommenen Differentialquotienten der

große k, demnach ist $C = \frac{1}{2} lg\, 2\pi$, und man erhält die Raabesche Formel

$$\int_0^1 lg\,\Gamma(x+k)\,dx = \tfrac{1}{2} lg\, 2\pi + k(lg\, k - 1).$$

167) Integraldarstellung der reziproken B-Funktion. Das Integral

$$F(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{(k+\lambda i)^a (k-\lambda i)^b}$$

hat einen Sinn, wenn $a + b > 1$ ist. Wir wollen aber vorläufig annehmen, daß a und b beide größer als Eins seien. Ersetzen wir darin

$$\frac{1}{(k+i\lambda)^a} \quad \text{durch} \quad \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-(k+\lambda i)\mu}\, \mu^{a-1}\, d\mu,$$

so erhalten wir

$$F(a,b) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(k+\lambda i)\mu}\, \mu^{a-1}}{(l-\lambda i)^b}\, d\mu\, d\lambda,$$

und da sich unter den gemachten Voraussetzungen die Integrationsfolge vertauschen läßt

$$F(a,b) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-k\mu}\, \mu^{a-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\mu i}\, d\lambda}{(l-i\lambda)^b}\, d\mu$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-k\mu}\, \mu^{a-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda\mu i}\, d\lambda}{(l+i\lambda)^b}\, d\mu.$$

Das innere Integral ist nach einer im § 145 gefundenen Formel für negative μ Null, für positive gleich

$$\frac{2\pi}{\Gamma(b)}\, e^{-l\mu}\, \mu^{b-1},$$

woraus folgt

$$F(a,b) = \frac{2\pi}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^{\infty} e^{-(k+l)\mu}\, \mu^{a+b-2}\, d\mu = \frac{2\pi}{(k+l)^{a+b-1}} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

$$= \frac{2\pi}{(k+l)^{a+b-1} B(a,b)\,(a+b-1)}.$$

Die Ausdehnung des Gültigkeitsbereiches der erhaltenen Formel auf die Fälle, in denen nur $a + b > 1$ ist, kann durch partielle Integration erreicht werden.

168) Setzen wir im Integral $F(a, b)$ $l = k$ und beachten, was stillschweigend vorausgesetzt wurde, daß für die Potenzen der Hauptwert zu nehmen sei, daß also

$$(k+\lambda i)^a = (k^2+\lambda^2)^{\frac{a}{2}} e^{arc(k+\lambda i)} = (k^2+\lambda^2)^{\frac{a}{2}} e^{a\,arctg\frac{\lambda}{k}},$$

$$(k-\lambda i)^b = (k^2+\lambda^2)^{\frac{b}{2}} e^{-b\,arctg\frac{\lambda}{k}} = (k^2+\lambda^2)^{\frac{b}{2}} e^{-b\vartheta}$$

ist, wo ϑ für $arctg\,\frac{\lambda}{k}$ gesetzt ist, und ϑ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, so gewinnen wir die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(b-a)\vartheta i}\,d\lambda}{(k^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}(a+b)}} = \frac{2\pi}{(2k)^{a+b-1}} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)},$$

die durch Spaltung in ihren reellen und imaginären Teil zwei neue liefert. Nehmen wir noch $k = 1$ an und führen ϑ als Integrationsvariabele ein $\lambda = tg\,\vartheta$, so folgt

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} cos\,(b-a)\vartheta\; cos^{a+b-2}\vartheta\; d\vartheta = \frac{\pi\,\Gamma(a+b-1)}{2^{a+b-2}\,\Gamma(a)\,\Gamma(b)}.$$

Diese Formel ist in der Theorie der Besselschen Funktionen brauchbar. Ersetzt man noch a, b durch $a+1$, $b+1$, so folgt

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} cos^{a+b}\vartheta\; cos\,(b-a)\vartheta\; d\vartheta = \frac{\pi\,\Gamma(a+b+1)}{2^{a+b+1}\,\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)}.$$

Integration zweigliedriger Differentiale.

Die Integration vollständiger Differentiale ist an sich von großer Bedeutung. Auf die Integration von Funktionen einer komplexen Veränderlichen angewandt liefert sie auch neue Gesichtspunkte und Hilfsmittel für die Auswertung gewöhnlicher Integrale, so daß auch aus diesem Grunde ein Eingehen auf diese Formen notwendig ist.

169) Das zweigliedrige Differential. Wenn sich der Ausdruck

$$\frac{w(x+h\,cos\,\varphi,\; y+h\,sin\,\varphi)}{h}$$

für abnehmende h einem bestimmten Grenzwert nähert, so nennen wir denselben den in der Richtung φ genommenen Differentialquotienten der

Funktion $w(x,y)$ an der Stelle xy. Für $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ schreiben wir, wenn der Grenzwert vorhanden ist, für diesen Differentialquotienten

$$w_1(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial x}, \quad w_2(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial y},$$

und nennen diese Ausdrücke die partiellen Differentialquotienten von w nach x bzw. y. Für $\varphi = \pi$ und $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ erhält man die rückwärtsgenommenen partiellen Differentialquotienten, die mit den vorwärtsgenommenen nicht notwendig übereinstimmen. — Der in der Richtung φ genommene Differentialquotient läßt sich schreiben

$$w_1(x,y)\cos\varphi + w_2(x,y)\sin\varphi$$

wenn

$$w(x+h, y+k) = w(x,y) + w_1(x,y)h + w_2(x,y)k + \sqrt{h^2+k^2}\,H$$

ist, und H mit gleichzeitig abnehmenden h und k verschwindet. Dies ist z. B. im Innern des Konvergenzgebietes der Fall, wenn w eine Potenzreihe der Form ist, $w = \sum\sum A_{mn}(x-a)^m(y-b)^n$, in der die Summen über alle ganzen nicht negativen m und n zu erstrecken sind.

170) Aus der Existenz der partiellen Differentialquotienten $w_1(x,y)$, $w_2(x,y)$ folgt noch nicht, daß für abnehmende h

$$lim\,(w(x+h\cos\varphi, y+h\sin\varphi) - w(x,y)) : h = w_1\cos\varphi + w_2\sin\varphi$$

sei. Ein Beispiel ist die Funktion

$$w(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\left(2\,arctg\,\frac{y}{x}\right),$$

für die an der Stelle $x=0$, $y=0$, $w_1=0$, $w_2=0$ ist, während der in der Richtung φ genommene Differentialquotient den Wert $\sin 2\varphi$ hat.

171) Das vollständige Differential. Wenn sich für alle Werte von φ ein einziger bestimmter Wert von h so angeben läßt, daß

$$\frac{w(x+h\cos\varphi, y+h\sin\varphi) - w(x,y)}{h} = w_1(x,y)\cos\varphi + w_2(x,y)\sin\varphi + \delta$$

ist, und daß δ für dieses und jedes kleinere h und für jedes φ dem absoluten Betrage nach kleiner als σ wird, wie klein auch σ sein mag, so sagt man, die Funktion $w(x,y)$ besitze an der Stelle x,y ein *vollständiges* (erstes) Differential und man schreibt

$$dw(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial w(x,y)}{\partial y}dy = w_1 dx + w_2 dy.$$

Zur Existenz eines vollständigen Differentials reicht es nicht aus, daß in jeder Richtung φ der Differentialquotient von

$$w(x,y) = w_1\cos\varphi + w_2\sin\varphi$$

ist, sondern es muß sich für h ein von Null verschiedenes Minimum angeben lassen, so daß

$$(w(x+h\cos\varphi, y+h\sin\varphi) - w(x,y)) : h = w_1\cos\varphi + w_2\sin\varphi + \xi\sigma$$
$$(abs\ \xi \leqq 1)$$

ist, wie klein auch σ vorgegeben, und was auch φ sein mag.

Ist eine Funktion $w(x,y)$ im allgemeinen Null, im Innern zweier sich und die x-Achse im Punkt $x=0$, $y=0$ berührenden Kurven von Null verschieden, z. B. gleich Eins, so sind w_1, w_2 beide im Punkte $x=0$, $y=0$ Null, und der in der beliebigen Richtung φ genommene Differentialquotient ist auch Null. Gleichwohl besitzt dort diese Funktion kein vollständiges Differential. Sie ist dort unstetig.

172) Sind $w_1(x,y)$, $w_2(x,y)$ stetige Funktionen von x, y, so ist

$$w_1 dx + w_2 dy$$

ein vollständiges Differential. Denn es ist in diesem Falle

$$w(x+h\cos\varphi, y+h\sin\varphi) - w(x,y)$$
$$= w(x+h\cos\varphi, y+h\sin\varphi) - w(x, y+h\sin\varphi) + w(x, y+h\sin\varphi) - w(x,y)$$
$$= h\cos\varphi\, w_1(x, y+h\sin\varphi)$$
$$+ h\cos\varphi\,(w_1(x+\xi h\cos\varphi, y+h\sin\varphi) - w_1(x, y+h\sin\varphi))$$
$$+ h\sin\varphi\, w_2(x,y) + h\sin\varphi\,(w_2(x, y+\eta h\sin\varphi) - w_2(x,y))$$
$$= h(w_1(x,y)\cos\varphi + w_2(x,y)\sin\varphi) + hH$$

und H wird wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von w_1 und w_2 so beliebig klein, daß es für ein bestimmtes h kleiner als eine beliebig klein vorgegebene Zahl σ gemacht werden kann.

173) Ist $w(x,y)$ eine in einem Gebiete T stetige Funktion und ist in T überall

$$w_1(x,y) = \partial w(x,y) : \partial x = 0, \quad w_2(x,y) = \partial w(x,y) : \partial y = 0,$$

so ist $w(x,y)$ in T eine Konstante.

Beweis. Das Gebiet T sei zunächst ein Rechteck mit den Ecken x_0, y_0; x_0, y'; x', y'; x', y_0, so ist für jedes angebbare y zwischen y_0 und y'

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = 0, \quad w(x,y) = w(x_0, y) = f(y).$$

und da $w(x,y)$ stetig ist, so ist auch $w(x, y \pm 0) = w(x,y) = f(y)$, also auch bei Annäherung von y an bestimmte Werte kann $w(x,y)$ nicht von x abhängen. Da nun weiter

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = \frac{df(y)}{dy} = 0$$

ist, zwischen y_0 und y', so ist w auch von y unabhängig. Es ist w. z. b. w.

$$w(x,y) = w(x_0,y_0) = w(x',y').$$

Ist aber das Gebiet T kein Rechteck, so kann man doch in T aneinanderstoßende Rechtecke einschreiben, welche T soweit erschöpfen, daß nur am Rande Stücke von T übrig bleiben, die beliebig klein gemacht werden können. In jedem einzelnen Rechteck und am Rande derselben hat die Funktion $w(x,y)$ denselben Wert, also, da immer ein Rand eines Rechtecks stückweise mit dem Rande eines anstoßenden zusammenfällt, hat sie in allen Rechtecken denselben konstanten Wert. Es hat demnach w in einem Gebiete einen konstanten Wert, das das Gebiet T so nahe als man will erschöpft. Sie ist bis in jede beliebige Nähe des Randes konstant, und hat deshalb wegen der vorausgesetzten Stetigkeit auch am Rande überall denselben Wert.

174) Wenn eine stetige Funktion $w(x,y)$ in einem Gebiete T überall die partiellen Differentialgleichungen erfüllt

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = p(x,y), \quad \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = q(x,y),$$

so ist sie dadurch in diesem Gebiete bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Beweis. Ist $f(x,y)$ eine andere Funktion derselben Beschaffenheit, so ist in T

$$\frac{\partial (f(x,y) - w(x,y))}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial (f(x,y) - w(x,y))}{\partial y} = 0$$

und folglich ist, w. z. b. w., $f(x,y) - w(x,y)$ eine Konstante.

175) Das zweigliedrige Integral. Eine im Gebiete T stetige Funktion $w(x,y)$, deren partielle Differentialquotienten überall

$$w_1(x,y) = p(x,y), \quad w_2(x,y) = q(x,y)$$

sind, nennt man das Integral des Differentiales $p\,dx + q\,dy$, und schreibt

$$w(x,y) - w(x_0,y_0) = \int_{x_0,y_0}^{x,y} p\,dx + q\,dy,$$

worin die untere Grenze x_0, y_0 und die obere Grenze x, y im Gebiete T liegen müssen. Ob dann wirklich

$$dw = p\,dx + q\,dy$$

im Sinne des § 171 geschrieben werden kann, und die Frage, ob immer eine stetige Funktion w existiert, deren partielle Differentialquotienten $w_1 = p$, $w_2 = q$ sind, wird später entschieden.

176) Liegen die Punkte x_0, y_0; x_1, y_1; $\cdots$; x_n, y_n in einem Gebiete T, in dem eine stetige Funktion $w(x,y)$ vorhanden ist, deren partielle Differentialquotienten $w_1 = p$, $w_2 = q$ sind, so ist

$$\int_{x_0,y_0}^{x_n,y_n}(p\,dx+q\,dy) = w(x_1,y_1) - w(x_0,y_0) + w(x_2,y_2) - w(x_1,y_1) + \cdots + w(x_n,y_n) - w(x_{n-1},y_{n-1})$$
$$= w(x_n,y_n) - w(x_0,y_0)$$
$$= \int_{x_0,y_0}^{x_1,y_1} p\,dx+q\,dy + \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} p\,dx+q\,dy + \cdots + \int_{x_{n-1},y_{n-1}}^{x_n,y_n} p\,dx+q\,dy.$$

Ebenso ergibt sich

$$\int_{x_0,y_0}^{x',y'} p\,dx+q\,dy = -\int_{x',y'}^{x_0,y_0} p\,dx+q\,dy.$$

177) Integrationsmethoden. Ist T ein Rechteck oder läßt sich in T ein Rechteck mit den Ecken x_0, y_0; x', y_0; x', y'; x_0, y' vollständig einschreiben, so ist nach dem vorigen Paragraphen und unter dessen Voraussetzungen

$$\int_{x_0,y_0}^{x',y'} p\,dx+q\,dy = \int_{x_0,y_0}^{x',y_0} p\,dx+q\,dy + \int_{x',y_0}^{x',y'} p\,dx+q\,dy$$
$$= w(x',y_0) - w(x_0,y_0) + w(x',y') - w(x',y_0)$$
$$= \int_{x_0}^{x'} p(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y'} q(x',y)\,dy.$$

Die Integration des zweigliedrigen Differentiales ist auf zwei gewöhnliche Integrationen zurückgeführt. Eine analoge Schlußweise ergibt

$$\int_{x_0,y_0}^{x',y'} p\,dx+q\,dy = \int_{y_0}^{y'} q(x_0,y)\,dy + \int_{x_0}^{x'} p(x,y')\,dx,$$

immer unter der Voraussetzung der Existenz einer stetigen Funktion $w(x,y)$.

Wir wollen im ersten Falle die Geraden x_0, y bis x', y_0 und x', y_0 bis x', y' den *Integrationsweg*, im zweiten x_0, y_0 bis x_0, y' und x_0, y' bis x', y' den Integrationsweg nennen.

178) Integration über eine Kurve. Wir setzen immer noch voraus, daß eine wohlbestimmte stetige Funktion in T existiert, deren partielle Ableitungen p und q sind.

Wir verbinden die Punkte x_0, y_0, x', y' durch eine im Innern von T verlaufende Kurve s, von der wir voraussetzen, daß sie Länge und, einzelne Ecken und andere singuläre Punkte ausgenommen, überall eine Tangente besitzt. Auf ihr bestimmen wir die Punkte

$$x_0, y_0,\ x_1, y_1,\ x_2, y_2,\ \cdots,\ x_{n-1}, y_{n-1},\ x', y'$$

so nahe aneinander, daß alle Rechtecke, deren gegenüberliegende Ecken $x_\mu, y_\mu,\ x_{\mu+1}, y_{\mu+1}$ sind, ins Innere von T fallen, und nehmen an, daß die Distanzen x_μ, y_μ bis $x_{\mu+1}, y_{\mu+1}$ sämtlich kleiner seien als eine kleine gegebene Größe d, so haben wir

$$\int_{x_0, y_0}^{x', y'} p\,dx + q\,dy = \sum_{0(\mu)}^{n-1} \int_{x_\mu, y_\mu}^{x_{\mu+1}, y_{\mu+1}} p\,dx + q\,dy$$

$$= \sum_{0(\mu)}^{n-1} \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} p(x, y_\mu)\,dx + \sum_{0}^{n-1} \int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} q(x_{\mu+1}, y)\,dy.$$

Bezeichnen wir die Strecke zwischen x_μ, y_μ und $x_{\mu+1}, y_{\mu+1}$ mit $s_{\mu+1} - s_\mu$, und den Winkel, den sie mit der positiven x-Achse bildet, mit φ_μ, und sind p, q stetige Funktionen in T (auf welchen Fall wir uns beschränken wollen) und liegen ξ_μ, η_μ zwischen Null und Eins, so ist

$$\int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} p(x, y_\mu)\,dx = p(x_\mu + \xi_\mu(x_{\mu+1} - x_\mu), y_\mu)\cos\varphi_\mu(s_{\mu+1} - s_\mu)$$

$$= p(x_\mu, y_\mu)\cos\varphi_\mu(s_{\mu+1} - s_\mu) + \Xi_\mu(s_{\mu+1} - s_\mu),$$

$$\int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} q(x_{\mu+1}, y)\,dy = q(x_{\mu+1}, y_\mu + \eta_\mu(y_{\mu+1} - y_\mu))\sin\varphi_\mu(s_{\mu+1} - s_\mu)$$

$$= q(x_{\mu+1}, y_\mu)\sin\varphi_\mu(s_{\mu+1} - s_\mu) + \mathsf{H}_\mu(s_{\mu+1} - s_\mu),$$

worin Ξ_μ, H_μ mit abnehmenden d gegen Null konvergieren. In $q(x_{\mu+1}, y_\mu)$ können wir $x_{\mu+1}$ durch x_μ ersetzen, wodurch sich nur H_μ um eine mit d verschwindende Größe ändert, die wir in H_μ einrechnen. Für $lim\ d = 0$ wird offenbar

$$lim\,(\Xi_\mu + \mathsf{H}_\mu)(s_{\mu+1} - s_\mu) = 0,$$

wofern nur die Kurve s eine endliche Länge hat. In dem Grenzwerte

$$\int_{x_0, y_0}^{x', y'} p\,dx + q\,dy = lim \sum (p(x_\mu, y_\mu)\cos\varphi_\mu + q(x_\mu, y_\mu)\sin\varphi_\mu)(s_{\mu+1} - s_\mu)$$

kommen nur Werte von p und q in Betracht, die Stellen auf der Kurve s angehören. Man kann deshalb

$$p(x, y) = \pi(s), \quad q(x, y) = \varkappa(s)$$

setzen, und gewinnt so die Gleichung

$$\int_{x_0, y_0}^{x', y'} p\,dx + q\,dy = lim \sum_{(\mu)} (\pi(s_\mu) \cos\varphi_\mu + \varkappa(s_\mu) \sin\varphi_\mu)(s_{\mu+1} - s_\mu)$$

$$= \int_{s_0}^{s'} (\pi(s) \cos\varphi + \varkappa(s) \sin\varphi)\,ds.$$

Darin ist φ durch s auszudrücken. Dem Punkte $x_0 y_0$ entspricht hier die Kurvenlänge s_0, dem Punkte $x'y'$ die Länge s', dem Punkte $x_\mu y_\mu$ die Länge s_μ. Wird die Messung der Kurvenlänge im Punkte $x_0 y_0$ begonnen, so ist $s_0 = 0$.

Das Integral zwischen $x_0 y_0$ bis $x'y'$, über verschiedene in T verlaufende Wege erstreckt, ergibt denselben Wert, und das Integral über eine geschlossene Kurve ist Null.

179) Zwischen p und q bestand bisher die Beziehung, daß sie die partiellen Ableitungen einer und derselben Funktion w sein sollten. Man kann aber auch, wenn p, q willkürliche stetige oder wenigstens integrable Funktionen sind, den Ausdruck

$$\int_{(s)} p\,dx + q\,dy = \int_{s_0}^{s'} (p(x,y) \cos\varphi + q(x,y) \sin\varphi)\,ds,$$

worin x, y, φ durch s auszudrücken sind, das Integral des Differentiales $p\,dx + q\,dy$ über den Weg s nennen. Ein solches Integral wird aber im allgemeinen nicht auf verschiedenen Integrationswegen zwischen $x_0 y_0$ und $x'y'$ denselben Wert annehmen, es wird nicht als eine Funktion der oberen Grenze schlechthin angesehen werden können. Ist z. B.

$$p = a,\ q = x,$$
$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ x' = 1,\ y' = 1,\ s_0 = 0,$$

und integrieren wir auf drei verschiedenen Wegen von $x = 0$, $y = 0$ bis $x = 1$, $y = 1$

erstens von $x = 0$, $y = 0$ bis $x = 1$, $y = 0$ bis $x = 1$, $y = 1$,
zweitens von $x = 0$, $y = 0$ bis $x = 0$, $y = 1$ bis $x = 1$, $y = 1$,
drittens über die Verbindungsgerade der Punkte $x = 0$, $y = 0$ bis $x = 1$, $y = 1$, wo $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, $x = \sqrt{\frac{1}{2}}s$, $y = \sqrt{\frac{1}{2}}s$ ist,

so erhalten wir

$$\int_{0,0}^{1,1} a\,dx + x\,dy = \int_0^1 a\,dx + \int_0^1 dy = a + 1,$$

$$\int_{0,0}^{1,1} a\,dx + x\,dy = \int_0^1 0\,dy + \int_0^1 a\,dx = a,$$

$$\int_{0,0}^{1,1} a\,dx + x\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,a + \tfrac{1}{2}s\right) ds = a + \tfrac{1}{2}.$$

Wir erhalten also auf jedem anderen Wege ein anderes Resultat. Eine Funktion w, deren partielle Ableitungen $w_1 = a$, $w_2 = x$ wären, existiert nicht.

180) Damit die Funktion w, deren partielle Ableitungen $w_1 = p$, $w_2 = q$ sind, in einem Rechteck mit den Ecken x_0y_0, $x'y_0$, $x'y'$, x_0y' existiere, ist notwendig, daß

$$F = \int_{x_0}^{x} p(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} q(x, y)\,dy$$

diese Differentialquotienten besitze. Daß F eine stetige Funktion von x, y sei, erkennt man leicht, weshalb wir den Beweis unterdrücken. — Differenzieren wir F nach x, so folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p(x, y_0) + \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} q(x, y)\,dy.$$

Wir machen die Annahme, daß wir die Differentiation unter den Integralzeichen ausführen dürfen, und daß $\partial q : \partial x$ vorhanden ist. So folgt weiter

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}\,dy,$$

und dieser Ausdruck soll gleich $p(x, y)$ sein. Differenzieren wir nun nach y, was nur möglich ist, wenn $p(x, y)$ differenzierbar ist, so resultiert

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}.$$

Dies erfordert, daß $\partial q(x, y) : \partial x$ stetig in x sei. Ist dieser Differentialquotient stetig in x, y, so ist das auch ausreichend für die Zulässigkeit der oben angewandten Differentiation unter den Integralzeichen. Es ergibt sich also, daß

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$$

im Rechteck sein muß. — Die Bedingung ist aber auch ausreichend. Denn umgekehrt folgt aus ihr durch Integration nach y zwischen y_0 und y, daß

$$p(x, y) - p(x, y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}\,dy,$$

und also

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_{x_0}^{x} p(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} q(x, y)\, dy\right\}$$

$$= p(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}\, dy = p(x, y).$$

Daß auch $\partial F : \partial y = q(x, y)$ sei, ergibt sich unmittelbar aus dem Ausdruck

$$F = \int_{x_0}^{x} p(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} q(x, y)\, dy,$$

weil das erste Integral von y unabhängig ist.

In unserem Rechtecke existiert also die stetige Funktion $w(x, y)$, deren partielle Ableitungen bzw. p und q sind, wenn die angeführten Bedingungen erfüllt sind, und das Integral über eine geschlossene Kontur im Rechteck ist Null.

181) Der letzte Satz heißt der Cauchysche Satz. Wir haben ihn aber nur in einem Rechteck bewiesen. Wir könnten ihn dadurch erweitern, daß wir ihn durch aneinanderstoßende Rechtecke auf ein Gebiet T ausdehnten. Besondere Umstände aber, die auftreten, wenn ein Gebiet T mehrfach zusammenhängend ist, d. h. wenn T nicht durch eine geschlossene Kontur, sondern durch zwei oder mehrere, wie z. B. ein Ringgebiet durch zwei konzentrische Kreise, begrenzt ist — solche besonderen Umstände lassen es rätlich erscheinen, noch einen anderen Beweis des Cauchyschen Satzes zu geben, der zwar wohl schon früher bekannt war, aber durch Riemann allgemeiner geläufig geworden ist.

Es seien p, q in einem Gebiete T, das durch einen oder mehrere geschlossene Kurvenzüge begrenzt sein kann, Funktionen, die überall die partielle Differentialgleichung befriedigen

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Die Bedingung, daß diese Funktionen $\partial p : \partial y$, $\partial q : \partial x$ stetig sein sollen, kann durch die etwas weitere ersetzt werden, daß ein über sie im Gebiete T erstrecktes eigentliches Doppelintegral vorhanden sein soll, kürzer gesagt, daß sie in T integrabel sind. Es soll bewiesen werden, daß das über die ganze Begrenzung von T im gleichen Sinne erstreckte Integral

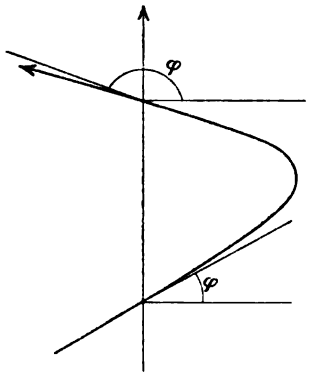
$$\int p\, dx + q\, dy$$

gleich Null ist.

Durchläuft man die Begrenzung von T in einer Richtung, so sagen wir, daß man sie im positiven Sinne durchlaufe, wenn die anstoßenden

Gebietsstücke von T zur Linken liegen. Liegen sie zur Rechten, so ist der Sinn der negative. Beim Beweise des Cauchyschen Satzes wollen wir annehmen, daß die Begrenzung im positiven Sinne durchlaufen werde.

Tritt eine der x-Achse parallele Gerade mit wachsenden x in das Gebiet T ein, so bildet an der Eintrittsstelle die Begrenzung mit der positiven x-Achse einen Winkel φ, der im dritten oder vierten Quadranten liegt, sein Sinus ist negativ. An der Austrittsstelle liegt φ im ersten oder zweiten Quadranten, $\sin\varphi$ ist positiv. Tritt eine der y-Achse parallele Gerade mit wachsenden y in T ein, so bildet an der Eintrittsstelle die Begrenzung mit der positiven x-Achse einen Winkel, der im ersten oder vierten Quadranten liegt, $\cos\varphi$ ist positiv; an der Austrittsstelle liegt φ im zweiten oder dritten Quadranten, $\cos\varphi$ ist negativ.



Das über das Gebiet T erstreckte Integral

$$U = \int\int \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\, dy$$

ist Null, weil jedes Integrationselement Null ist. Wir transformieren zuerst den einen Teil

$$Q = \int\int \frac{\partial q}{\partial x} dx\, dy.$$

Die Werte von ds, φ, q an der Eintrittsstelle einer Parallelen zur x-Achse — es kann deren mehrere geben, besonders wenn T von mehreren geschlossenen Kurven begrenzt ist, aber auch sonst —, diese Werte seien

$$ds_,, ds_{,,}, ds_{,,,}, \cdots, \varphi_,, \varphi_{,,}, \cdots, q_,, q_{,,}, \cdots,$$

an der Austrittsstelle seien diese Werte

$$ds', ds'', \cdots, \varphi', \varphi'', \cdots, q', q'', \cdots.$$

Dann ist durch Ausführung der Integration nach x

$$\begin{aligned} dy \int \frac{\partial q}{\partial x} dx &= dy\, q' + dy\, q'' \cdots - dy\, q_, - dy\, q_{,,} \cdots \\ &= ds' \sin\varphi' q' + ds'' \sin\varphi'' q'' + ds''' \sin\varphi''' q''' + \cdots \\ &+ ds_, \sin\varphi_, q_, + ds_{,,} \sin\varphi_{,,} q_{,,} + ds_{,,,} \sin\varphi_{,,,} q_{,,,} + \cdots \\ &= \Sigma q \sin\varphi\, ds, \end{aligned}$$

wo die Summe über sämtliche Ein- und Austrittsstellen zu erstrecken ist. Daraus folgt weiter

$$Q = \int\int \frac{\partial q}{\partial x} dx\, dy = \int_{(s)} q \sin\varphi\, ds,$$

wo das letzte Integral über die ganze Begrenzung s von T zu erstrecken ist.

Eine völlig analoge Schlußweise, bei der man die Integration zuerst über y ausführt, bringt uns zu der Gleichung

$$P = -\int\int \frac{\partial p}{\partial y}\, dy\, dx = \int_{(s)} p \cos\varphi\, ds$$

und da $U = P + Q$ Null ist, so gelangen wir bei dem Cauchyschen Satze

$$\int_{(s)} p\, dx + q\, dy = 0,$$

wo, um es nochmals zu betonen, die Integration über die ganze Begrenzung s von T zu erstrecken ist.

182) Verlaufen in einem Gebiete T zwischen x_0, y_0 und x', y' zwei Kurven s_1 und s_2, und begrenzen diese zusammen und allein ein Stück von T, so ist

$$\int_{(s_1)} p\, dx + q\, dy = \int_{(s_2)} p\, dx + q\, dy = \int_{x_0, y_0}^{x', y'} p\, dx + q\, dy.$$

Bedeutet $\bar{s}_2$ den Weg s_2 von x', y' nach x_0, y_0 genommen, so ist $s_1 + \bar{s}_2$ eine geschlossene, ein Stück von T für sich begrenzende Kurve und

$$\int_{(s_1 + \bar{s}_2)} p\, dx + q\, dy = \int_{(s_1)} p\, dx + q\, dy - \int_{(s_2)} p\, dx + q\, dy = 0,$$

$$\int_{(s_1)} p\, dx + q\, dy = \int_{(s_2)} p\, dx + q\, dy,$$

weil die Integrale über s_2 und $\bar{s}_2$ entgegengesetzte Werte haben.

Ist T von einer einzigen geschlossenen Kurve begrenzt, so schließen, wie die Anschauung lehrt, s_1 und s_2 stets ein Stück völlig ein, und es ist dann

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} p\, dx + q\, dy$$

vom Integrationswege unabhängig, es ist eine wohlbestimmte Funktion der oberen Grenze x, y. Ihre partiellen Ableitungen sind bzw. p, q.

Ist T nicht einfach zusammenhängend, ist es, um zu spezialisieren, z. B. ein von zwei konzentrischen Kreisen begrenzter Ring, so sind zwischen denselben Punkten x_0, y_0 und x, y verlaufende Linien denkbar, die zusammen für sich allein nicht ein Stück von T vollständig begrenzen. Legen wir z. B. zwischen die beiden begrenzenden Kreise einen dritten Kreis, und bestimmen auf ihm zwei Punkte x_0, y_0, x, y, so kann man

einmal von x_0, y_0 auf einem Teile s_1 dieses Kreises gelangen, ein andermal auf dem anderen Teile s_2 desselben Kreises.

Die beiden Kurvenstücke s_1 und s_2 begrenzen für sich allein nicht ein Stück des Ringes T vollständig, sondern man muß dazu noch entweder den innern oder den äußern Begrenzungskreis hinzunehmen. Es braucht deshalb in diesem Falle

$$\int_{(s_1)} p\,dx + q\,dy + \int_{(s_2)} p\,dx + q\,dy$$

zu sein, und das Integral

$$\int_{x_0 y_0}^{xy} p\,dx + q\,dy$$

ist nicht schlechthin eine Funktion der obern Grenze, da der Wert derselben noch vom Integrationswege abhängt.

Man kann aber in diesem Falle die beiden begrenzenden Kurven, speziell die beiden begrenzenden Kreise, durch eine in T verlaufende knotenlose Linie l verbinden und ihre beiden Ufer der Begrenzung hinzurechnen. Bezeichnet man das durch diese Aufschneidung mit begrenzte Gebiet mit T', so ist nun in T' $\int p\,dx + q\,dy$ wieder eine Funktion der oberen Grenze. T' ist einfach zusammenhängend.

Zu beiden Seiten der Linie l, in Punkten, die einander auf den verschiedenen Ufern von l gegenüberliegen, unterscheiden sich die Werte des Integrales um eine Konstante, den Periodizitätsmodul. Denn erstreckt man das Integral $\int p\,dx + q\,dy$ von einem Punkte $x_0 y_0$ auf l, zu einem anderen xy auf l, einmal auf dem einen, ein andermal auf dem anderen Ufer, so liefern die beiden Integrale dieselben Werte, weil p und q in entsprechenden Punkten der beiden Ufer gleiche Werte haben. Das Integral von $x_0 y_0$ bis xy wächst, über das eine oder das andere Ufer erstreckt, um dieselbe Größe.

183) Beispiel. Ist

$$p = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad q = \frac{x}{x^2+y^2},$$

so ist in einem Ringgebiet, das von einem sehr kleinen Kreise R_1 und einem sehr großen Kreise R_2 um Null gebildet wird, überall

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Zerschneidet man diesen Ring T durch eine Linie l, die mit der negativen x-Achse zusammenfallen mag, so erhält man ein einfach zusammenhängendes Gebiet T', in dem

$$\int p\,dx + q\,dy = arctg\,\frac{y}{x}$$

eine wohl bestimmte Funktion von xy ist. Ihre Werte liegen zwischen $-\pi$ und $+\pi$, längs der Linie l unterscheiden sie sich um 2π. Ohne die Linie l aber ist die Funktion $arctg(y:x)$ unendlich vieldeutig. Ihre verschiedenen Werte unterscheiden sich um Multipla von 2π.

184) Differentiation nach einem Parameter. Ist $p\,dx + q\,dy$ ein vollständiges Differential, das in einem einfach zusammenhängenden Gebiete T ein eindeutiges Integral $w(x, y)$ besitzt, und sind p, q Funktionen eines Parameters α, so fragt es sich, ob oder wann

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial \alpha} = \int \frac{\partial p}{\partial \alpha} dx + \frac{\partial q}{\partial \alpha} dy$$

gesetzt werden kann. Da das Integral w zwischen $x_0 y_0$ und xy über einen bestimmten Weg nach den voraufgehenden Untersuchungen auf ein gewöhnliches einfaches Integral zurückgeführt ist, so leuchtet ein, daß die Differentiation unter dem Integralzeichen ausgeführt werden kann, wenn längs des Integrationsweges die unter 180) aufgestellten Bedingungen erfüllt sind. Soll aber

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} dx + \frac{\partial q}{\partial \alpha} dy$$

ein vollständiges Differential sein, so muß

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial \alpha}$$

sein. Da nun $\partial p : \partial y = \partial q : \partial x$ ist, so ist die letzte Gleichung erfüllt, wenn in p und q die Differentiationsreihenfolge nach α und y bzw. nach α und x vertauschbar ist.

185) Definition der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Nach dem allgemeinen Funktionsbegriff kann jede Funktion von x, y als Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + yi$ angesehen werden. Denn wenn z gegeben ist, so ist der reelle Teil x und der mit i multiplizierte Teil von z die Zahl y gegeben. Also ist da, wo w eine Funktion von x und y ist, w auch eine Funktion von z. Das Wort, Funktion einer komplexen Veränderlichen z wird aber in der Analysis nur in einem beschränkteren Sinne gebraucht. Jede Funktion w von x, y, die in einem bestimmten Konvergenzgebiete durch eine Potenzreihe der Form

$$w = \sum A_\mu (z-a)^\mu$$

darstellbar ist, heißt in diesem Gebiete eine Funktion der komplexen Veränderlichen z. Dasselbe gilt von ihrer analytischen Fortsetzung.

Die Cauchy-Riemannsche Funktionentheorie geht von einer anderen Definition der Funktionen einer komplexen Veränderlichen z aus. Eine

Funktion von x, y; $w(x, y)$ heißt eine Funktion der komplexen Veränderlichen z in einem Gebiete T, und wird kurz mit $w(z)$ bezeichnet, wenn sie, von einzelnen singulären Stellen abgesehen, überall einen von der Differentiationsrichtung (vgl. § 69) unabhängigen Differentialquotienten besitzt. Ist z. B. $w(z) = A(z-a)^m$, wo m eine ganze Zahl ist, so ist

$$\frac{w(z+h)-w(z)}{h} = Am(z-a)^{m-1} + h\varphi(z),$$

wo $abs\,\varphi(z)$ endlich ist. Was nun auch $arc\,h = arctg\,(dy:dx)$ sein mag, es ist

$$\frac{lim\, w(z+h)-w(z)}{h} = w'(z) = mA(z-a)^{m-1}.$$

Die Potenz besitzt einen von der Differentiationsrichtung ($arc\,h$) unabhängigen Differentialquotienten. Dasselbe gilt von einer Potenzreihe im Konvergenzgebiete.

Setzt man nun für $h = dz$ einmal dx, das andere Mal $i\,dy$, so folgt aus der angegebenen Definition

$$i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Zerlegt man w in seinen reellen und einen imaginären Teil, setzt

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

so ist

$$i\frac{\partial w}{\partial x} = i\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{dy} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}.$$

Und wenn man Reelles mit Reellem, Imaginäres mit Imaginärem vergleicht, so erhält man die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Daraus fließt durch nochmalige Differentiation, wenn sie möglich ist,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Auf diesen letzten Gleichungen beruht die vielfache Verwendbarkeit der Funktionen einer komplexen Veränderlichen in der mathematischen Physik.

186) Integration von Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Verbindet man zwei Punkte $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$ in einem Gebiete T durch eine Kurve s, deren Element ds mit der positiven x-Achse den Winkel φ einschließt, so kann man schreiben

$$\int_{(s)} w(z)\,dz = \int_{s_0}^{s} w(x+yi)\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,ds,$$

und man nennt den Ausdruck das über das Kurvenstück s erstreckte Integral der Funktion $w(z)$. Das Integral rechts läßt sich natürlich in zwei Teile zerlegen, von denen der eine reell, der andere mit i multipliziert ist.

Schreibt man das Integral in der Form

$$\int w(z)\,dx + iw(z)\,dy,$$

so ist der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ein vollständiges Differential, denn es ist

$$\frac{\partial w(z)}{\partial y} = \frac{\partial iw(z)}{\partial x},$$

und es ist deshalb das Integral in einem einfach zusammenhängenden Gebiete T vom Integrationswege unabhängig, und das Integral über die *ganze* Begrenzung eines beliebigen Gebietes T, in dem w die partielle Differentialgleichung befriedigt und endlich bleibt, ist Null. Im einfach zusammenhängenden Gebiete T ist das Integral eine Funktion der oberen Grenze z, und wieder eine Funktion der „komplexen Veränderlichen z". Denn setzen wir das Integral gleich $W(z)$, so ist

$$\frac{\partial W}{\partial x} = w(z), \quad \frac{\partial W}{\partial y} = iw(z), \quad \frac{i\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y}.$$

Genügt eine Funktion $w(z)$ in einem Gebiet T der partiellen Differentialgleichung $i\partial w : \partial x = \partial w : \partial y$ und ist sie endlich, so sagen wir kurz, sie sei im Gebiete T regulär.

187) **Darstellung einer regulären Funktion durch ein Randintegral.** Ist die Funktion $w(\zeta)$ in einem Gebiete T, in dem auch z liegt, regulär, und ist s die ganze Begrenzung dieses Gebietes, so ist, wenn das Integral über die *ganze* Begrenzung erstreckt wird,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(s)} \frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = w(z).$$

Beweis. Wir schlagen um den Punkt z in T einen Kreis mit dem sehr kleinen Radius ϱ, und bezeichnen seinen Umfang als Begrenzung mit (k), so ist in dem Gebiete, das von (s) und $-(k)$ begrenzt ist, $w(\zeta) : (\zeta - z)$ eine reguläre Funktion von ζ. Es ist deshalb nach dem Cauchyschen Satze

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(s)-(k)} \frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(s)} \frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{(k)} \frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(s)} \frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(k)} \frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

wie klein auch ϱ genommen werden mag.

Auf dem Kreise ist nun

$$\zeta - z = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad d\zeta = \varrho(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(k)}\frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{w(z+\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi))\,\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(z+\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi))\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(z)\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(z+\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi) - w(z))\,d\varphi = w(z) + \delta_\varrho.$$

In dem Integrale

$$\delta_\varrho = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(w(z+\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)) - w(z)\big)\,d\varphi$$

wird der absolute Betrag des Integranden, weil die reguläre Funktion $w(\zeta)$ im Punkte $\zeta = z$ stetig ist, mit abnehmenden ϱ beliebig klein. Unsere Gleichung gilt aber für jedes noch so kleine ϱ, es ist deshalb

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(z)}\frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = w(z),$$

w. z. b. w.

188) Unstetige Funktionen. Der Cauchysche Satz liefert, wenigstens vom prinzipiellen Standpunkte aus betrachtet, die einfachsten und zugleich sehr umfassende Fälle diskontinuierlicher Funktionen, dargestellt durch bestimmte Integrale. Denn ist w in einem Gebiet T regulär, so gibt das über die ganze Begrenzung desselben erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

den Wert $w(z)$, wenn z innerhalb T liegt, den Wert Null, wenn z außerhalb liegt.

Nehmen wir den allereinfachsten Fall, $w(\zeta) = 1$, und für T den Einheitskreis an, und beschränken auch noch z auf reelle Werte $z = x$, so ist

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{d\zeta}{\zeta - x} = \frac{1}{2i\pi}\int d\,lg(\zeta - x)$$

über den Einheitskreis erstreckt, gleich Eins, wenn $x^2 < 1$ ist, gleich

Null, wenn $x^2 > 1$ ist. Auf dem Einheitskreis ist $\zeta = \cos\varphi + i\sin\varphi$, und mithin ist*) unser Integral gleich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - x + i\sin\varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - x\cos\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2}\, d\varphi - \frac{ix}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2}.$$

Der imaginäre Teil ist nach dem Cauchyschen Satze gleich Null. Man erkennt das aber auch leicht durch Paarung sich zerstörender Integrationselemente.

Für das erste Integral folgt aus dem Cauchyschem Satze

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - x\cos\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2}\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1 - x\cos\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2}\, d\varphi$$

gleich Eins oder gleich Null, je nachdem $x^2 < 1$ oder $x^2 > 1$ ist. Für $x < 1$ sind alle Integrationselemente positiv.

189) Darstellung der Differentialquotienten von $w(z)$ durch Randintegrale. Das Integral

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(z)} \frac{w(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

darf nach z unter dem Integralzeichen differenziert werden. Die Differentialquotienten von $(\zeta - z)^{-1}$ nach z existieren unabhängig von der Differentiationsrichtung. Man erhält deshalb für den n-ten Differentialquotienten

$$w^{(n)}(z) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{2\pi i}\int_{(z)} \frac{w(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}},$$

woraus sich ergibt, daß die sämtlichen Differentialquotienten von der in T regulären Funktion $w(z)$ in T selbst wieder reguläre Funktionen von z sind.

190) Auf diesem Satze beruht die Möglichkeit des Nachweises, daß eine nach der Cauchy-Riemannschen Theorie definierte Funktion in der Umgebung eines Punktes, wo sie regulär ist, durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar ist. Diese Theorie und die auf Potenzreihen auf-

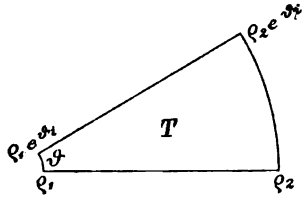
*) Es ist

$$\int_0^{\varphi} \frac{1 - x\cos\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2}\, d\varphi = arctg\, \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - x}.$$

Da wo der Nenner sein Zeichen wechselt, ist *arctg* stetig fortzusetzen.

gebaute kommen also hier zusammen. Wir müssen aber die Ausführung dieser Gedankengänge der Funktionentheorie überlassen.

191) Erweiterung eines Eulerschen Integrales. Wir haben früher gesehen, daß für positive k und α



$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{\alpha-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{k}$$

ist, wir haben auch bereits von dieser Formel Anwendung gemacht, fürden Fall, daß k eine komplexe Zahl mit positiv reellem Teile ist. Die Zulässigkeit solcher komplexen k soll jetzt erwiesen werden.

Wir nehmen das Integral

$$\int e^{-kz} z^{\alpha-1} dz$$

über die ganze Begrenzung s eines Gebietes T, das von zwei im Punkte $z = 0$ konzentrischen Kreisen mit den Radien ϱ_1, ϱ_2 und zwei Radien von ϱ_1 bis ϱ_2 und $\varrho_2 e^{\vartheta i}$ bis $\varrho_1 e^{\vartheta i}$ begrenzt ist, wo ϑ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ liegt, so daß $\cos\vartheta$ positiv ist. In diesem Gebiete ist $e^{-kz} z^{\alpha-1}$ eine reguläre Funktion der komplexen Veränderlichen z. Es ist folglich nach Cauchy

$$0 = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} e^{-kx} x^{\alpha-1} dx + i \int_0^{\vartheta} e^{-k\varrho_2(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \varrho_2^{\alpha} e^{\alpha i\varphi} d\varphi$$

$$+ \int_{\varrho_2}^{\varrho_1} e^{-k\varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} \varrho^{\alpha-1} e^{\alpha\vartheta i} d\varrho + i \int_{\vartheta}^{0} e^{-k\varrho_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \varrho_1^{\alpha} e^{\alpha\varphi i} d\varphi .$$

Läßt man ϱ_1 gegen Null konvergieren, und ϱ_2 über alle Grenzen wachsen, so konvergiert das zweite Integral, weil $k\cos\varphi$ positiv ist, das vierte Integral, weil α positiv ist, gegen Null, und man findet aus der aufgestellten Gleichung durch diese Grenzübergänge

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{\alpha-1} dx = e^{\alpha\vartheta i} \int_0^\infty e^{-k\varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} \varrho^{\alpha-1} d\varrho .$$

Setzen wir

$$k(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = p + qi, \quad \vartheta = arc(p+qi), \quad k = abs(p+qi),$$

so folgt

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{abs(p+qi)^\alpha} e^{-i\alpha\, arc(p+qi)} = \int_0^\infty e^{-(p+qi)x} x^{\alpha-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{(p+qi)^\alpha},$$

wo für $(p+qi)^\alpha$ der Hauptwert zu nehmen ist.

Vergleichen wir Reelles mit Reellem, Imaginäres mit Imaginärem, nachdem wir unserer Formel die Form gegeben haben

$$\int_0^\infty e^{-px}(\cos qx - i\sin qx)\,x^{\alpha-1}\,dx$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{abs(p+qi)^\alpha}\left(\cos(\alpha\, arc\,(p+qi)) - i\sin(\alpha\, arc\,(p+qi))\right),$$

so gelangen wir zu den Eulerschen Formeln

$$\int_0^\infty e^{-px}x^{\alpha-1}\cos qx\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{(p^2+q^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\cos\left(\alpha\, arctg\frac{q}{p}\right),$$

$$\int_0^\infty e^{-px}x^{\alpha-1}\sin qx\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{(p^2+q^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\sin\left(\alpha\, arctg\frac{q}{p}\right),$$

wo *arcustangens* zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist.

192) Der Fall $p=0$. Daß diese beiden Integrale einen Sinn haben, wenn $0<\alpha<1$ ist und $p=0$ gesetzt wird, ist aus 59) bekannt. Es fragt sich, ob der Wert der Integrale für diesen Fall einfach durch Einsetzen $p=0$ aus den obigen Formeln erlangt werden kann. Dazu ist nachzuweisen, daß sich diese Integrale *stetig* ändern, wenn p bis zu Null herabsinkt. Für die rechten Seiten ist die Stetigkeit ohne weiteres ersichtlich, wenn q nicht Null ist, was wir ausschließen. — Wir setzen

$$J_p = \int_0^\infty e^{-px}x^{\alpha-1}\cos qx\,dx,$$

so ist

$$J_p - J_0 = \int_0^\infty (e^{-px}-1)\,x^{\alpha-1}\cos qx\,dx$$
$$= \int_0^{1:\sqrt{p}} (e^{-px}-1)\,x^{\alpha-1}\cos qx\,dx + \int_{1:\sqrt{p}}^\infty (e^{-px}-1)\,x^{\alpha-1}\cos qx\,dx.$$

Die Funktion $e^{-px}-1$ ist zwischen 0 und $+\infty$ monoton. Liegt λ zwischen 0 und $1:\sqrt{p}$, μ zwischen $1:\sqrt{p}$ und ∞, so ist nach dem zweiten Mittelwertsatze

$$\int_0^{1:\sqrt{p}} (e^{-px}-1)\,x^{\alpha-1}\cos qx\,dx$$
$$= 0\cdot\int_0^\lambda x^{\alpha-1}\cos qx\,dx + (e^{-\sqrt{p}}-1)\int_\lambda^{1:\sqrt{p}} x^{\alpha-1}\cos qx\,dx.$$

Der Faktor $e^{-\sqrt{p}} - 1$ nähert sich mit abnehmenden p stetig der Zahl Null, der andere Faktor ist ein Integral, dessen Wert in endlichen Grenzen enthalten ist. Folglich ist

$$\lim_{p=0} \int_0^{1:\sqrt{p}} (e^{-px} - 1)\, x^{\alpha-1} \cos qx\, dx = 0.$$

Ebenfalls nach dem zweiten Mittelwertsatze ist

$$\int_{\sqrt{\frac{1}{p}}}^{\infty} (e^{-px} - 1)\, x^{\alpha-1} \cos qx\, dx$$

$$= (e^{-\sqrt{p}} - 1) \int_{\sqrt{\frac{1}{p}}}^{\mu} x^{\alpha-1} \cos qx\, dx - \int_{\mu}^{\infty} x^{\alpha-1} \cos qx\, dx.$$

Der erste Teil verschwindet für abnehmende p wieder wegen des Faktors $(e^{-\sqrt{p}} - 1)$, der zweite Teil verschwindet, weil $\mu > \sqrt{1:p}$ ist, denn dies ist ja die Bedingung dafür, daß das Integral einen Sinn hat. Es nähert sich also für abnehmende p J_p stetig dem Werte J_0, w. z. b. w. Analog ist der Beweis in dem Integral, in dem $\sin qx$ statt $\cos qx$ steht.

Demnach ist, wenn $0 < \alpha < 1$ und q positiv ist,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos qx\, dx}{x^{1-\alpha}} = \frac{\Gamma(\alpha)}{q^{\alpha}} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin qx\, dx}{x^{1-\alpha}} = \frac{\Gamma(\alpha)}{q^{\alpha}} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

193) Die Sinusformel der Gammafunktion. Unter 147) fanden wir, wenn $0 < \alpha < 1$ ist,

$$\frac{1}{2}\pi = \int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^{1-\alpha}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^{\alpha}}.$$

Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \cos\frac{\alpha\pi}{2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^{\alpha}} = \Gamma(1-\alpha) \sin\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Daraus ergibt sich durch Multiplikation

$$\frac{\pi}{2} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) \cos\frac{\alpha\pi}{2} \sin\frac{\alpha\pi}{2}, \quad \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.$$

Damit ist eine Formel, die wir früher mit Hilfe eines unendlichen Produktes ableiteten, durch die Integralrechnung allein gefunden. Die Beschränkung $0 < \alpha < 1$ ist in dieser Formel leicht zu beseitigen.

Für $\alpha = \frac{1}{2}$ ergibt sich noch das uns schon bekannte Resultat

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}} = \int_{-\infty}^\infty \cos(x^2)\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}} = \int_{-\infty}^\infty \sin(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

194) Erweiterung der letzten Formeln. Ersetzt man in den Formeln für $\int \cos(x^2)\,dx$, $\int \sin(x^2)\,dx$ x durch $\sqrt{p}x$, so folgt

$$\int_{-\infty}^\infty \cos(px^2)\,dx = \int_{-\infty}^\infty \sin(px^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2p}},$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{ipx^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2p}}(1+i) = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Nun substituieren wir $x + \frac{q}{p}$ für x, so erhalten wir

$$\int_{-\infty}^\infty e^{ix^2p+2qxi}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-\frac{iq^2}{p}+\frac{i\pi}{4}},$$

und durch Trennung des Reellen und Imaginären

$$\int_{-\infty}^\infty \cos(px^2+2qx)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{q^2}{p}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2p}}\left(\cos\frac{q^2}{p}+\sin\frac{q^2}{p}\right),$$

$$\int_{-\infty}^\infty \sin(px^2+2qx)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\cos\frac{q^2}{p}-\sin\frac{q^2}{p}\right),$$

$$\int_{-\infty}^\infty (\cos(px^2)\cos 2qx - \sin(px^2)\sin 2qx)\,dx$$

$$-\int_{-\infty}^\infty \cos(px^2)\cos 2qx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2p}}\left(\cos\frac{q^2}{p}+\sin\frac{q^2}{p}\right),$$

$$\int_{-\infty}^\infty \sin(px^2+2qx)\,dx = \int_{-\infty}^\infty (\sin(px^2)\cos 2qx + \cos(px^2)\sin 2qx)\,dx$$

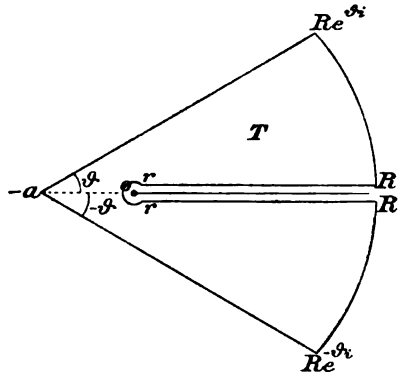
$$= \int_{-\infty}^\infty \sin(px^2)\cos 2qx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2p}}\left(\cos\frac{q^2}{p}-\sin\frac{q^2}{p}\right),$$

$$\int_0^\infty \cos(px^2)\cos 2qx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2p}}\left(\cos\frac{q^2}{p}+\sin\frac{q^2}{p}\right),$$

$$\int_0^\infty \sin(px^2)\cos 2qx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2p}}\left(\cos\frac{q^2}{p}-\sin\frac{q^2}{p}\right).$$

Ersetzt man in den beiden letzten Integralen $\cos 2qx$ durch $\sin 2qx$, so ist bisher die Auswertung der daraus hervorgehenden Integrale nicht gelungen.

195) Allgemein gültige Integraldarstellung der Gammafunktion. Die Begrenzung eines Gebietes T in der z- (oder x, y) Ebene bestehe aus dem Stück eines im Punkte $z = 0$ zentrischen Kreises, das in einem Punkte R des oberen Ufers der positiv reellen Achse, der x-Achse, beginnt und im Punkte $z = Re^{\vartheta' i}$ endet, wo $\vartheta' < \frac{\pi}{2}$ ist. Von da gehe die Begrenzung s geradlinig, gegen die x-Achse unter dem Winkel ϑ geneigt bis zu einem Punkte $-a$ der negativ reellen Achse. Von da unter dem Winkel $-\vartheta$ gegen die reelle Achse geneigt geradlinig bis zum Punkte $Re^{-\vartheta' i}$. Von da führe sie über ein Kreisstück bis zum Punkte R auf dem unteren Ufer der reellen Achse. Von da gehe s längs des unteren Ufers der reellen Achse bis zu einem Punkte r nahe dem Punkte Null. Weiter bilde sie einen kleinen Kreis um Null mit dem Radius r, der im Punkte r auf dem oberen Ufer der reellen Achse endet. Endlich führe sie von diesem Punkte r auf dem oberen Ufer der positiv reellen Achse zu dem Punkte R zurück, wo sie schließt. In diesem Gebiete T ist $e^{-z} z^{\alpha}$ eine reguläre Funktion der komplexen Veränderlichen z, und es ist deshalb das über s erstreckte Integral $\int e^{-z} z^{\alpha} dz$ gleich Null. Lassen wir R größer und größer werden, wobei ϑ' in ϑ übergeht, so wird das Integral über die beiden Kreisstücke, wie wir oben sahen, kleiner und kleiner, und hat den Grenzwert Null. Es ist deshalb das Integral (in leichtverständlicher Bezeichnung)



$$\int_{\infty e^{\vartheta i}}^{-a} e^{-z} z^{\alpha} dz + \int_{-a}^{\infty e^{-\vartheta i}} e^{-z} z^{\alpha} dz$$

$$= \int_{R}^{r} e^{-x} x^{\alpha} dx + \int_{(r)} e^{-z} z^{\alpha} dz + \int_{r}^{R} e^{-x} x^{\alpha} dx,$$

wo das Integral zwischen R und r auf dem oberen Ufer der reellen Achse, das Integral zwischen r und R auf dem unteren Ufer, oder wenn man dafür schreibt

$$e^{2\alpha\pi i} \int_{r}^{R} e^{-x} x^{\alpha} dx,$$

auf dem oberen Ufer zu nehmen ist. Ist nun der reelle Teil von α größer als -1, so verschwindet das über (r) genommene Integral mit r und man erhält in diesem Falle

$$\int_{\infty e^{-\vartheta i}}^{\infty e^{\vartheta i}} e^{-z} z^{\alpha}\, dz = (1 - e^{2\alpha i\pi}) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha}\, dx,$$

$$fac\,\alpha = \frac{1}{1 - e^{2\alpha i\pi}} \int_{\infty e^{-\vartheta i}}^{\infty e^{\vartheta i}} e^{-z} z^{\alpha}\, dz.$$

Dabei ist das Integral von $\infty e^{-\vartheta i}$ bis $-a$, und dann wieder von $-a$ bis $\infty e^{\vartheta i}$ geradlinig zu erstrecken. Nach dem Cauchyschen Satze kann dieser Integrationsweg durch unendlich viele andere ersetzt werden.

Dieser Ausdruck hat nun aber für jedes nicht ganzzahlige α einen Sinn. Durch partielle Integration erweist man, daß für die durch das Integral definierte Funktion $fac\,\alpha$ die Gleichung besteht

$$\alpha\, fac\,(\alpha - 1) = fac\,\alpha,$$

woraus man schließt, daß unser Integral die durch ein unendliches Produkt analytisch definierte Funktion $fac\,\alpha$ überall darstellt.

196) Um das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x - bi}\, dx,$$

in dem a und b positive Zahlen sein sollen, auszuwerten, und zugleich zu zeigen, daß es einen Sinn hat, nehmen wir das Integral über einen Halbkreis, der die reelle Achse zwischen $-R$ und $+R$ zum Durchmesser hat, und den Punkt bi im Innern enthält. In diesem Halbkreis ist, wie groß auch R sein mag, e^{iaz} eine reguläre Funktion der komplexen Veränderlichen z, und das über die Begrenzung dieses Halbkreises erstreckte Integral hat nach dem Cauchyschen Satze den Wert $2i\pi e^{-ab}$. Daraus fließt

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{x - bi}\, dx + i \int_0^{\pi} \frac{e^{iaR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\, R(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{R\cos\varphi + iR\sin\varphi - bi}\, d\varphi$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{x - bi}\, dx + i \int_0^{\pi} \frac{e^{-aR\sin\varphi} \cdot e^{iaR\cos\varphi}}{1 - \frac{b}{R}(\sin\varphi - i\cos\varphi)}\, d\varphi = 2i\pi e^{-ab}.$$

Das letzte Integral verschwindet mit wachsenden R wegen des Faktors $e^{-aR\sin\varphi}$ im Integranden, woraus fließt, weil $2i\pi e^{-ab}$ von R unab-

hängig ist, daß das Integral zwischen $-R$ und $+R$ vorhanden ist, wenn R über alle Grenzen wächst,*) und es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x-bi}\,dx = 2i\pi e^{-ab}.$$

Daraus kann man die Formeln des § 147 durch Trennung des Reellen und Imaginären von neuem ableiten.

Ist b negativ, so ist im Halbkreis $e^{iax} : (x-bi)$ überall regulär, und es ist deshalb das Integral Null.

197) Ist a eine komplexe, nicht rein reelle Zahl, und liegt μ zwischen -1 und $+1$, so hat das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^\mu (x^2-a^2)}\,dx$$

einen Sinn. Da sich das Integral nicht ändert, wenn man a durch $-a$ ersetzt, so können wir unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß der imaginäre Teil von a positiv sei.

Wir erstrecken das Integral zunächst über die Begrenzung s des Halbkreises des vorigen Paragraphen, fügen ihr jedoch noch einen sehr kleinen Halbkreis, der den Punkt Null ausschließt, hinzu. Dann ist nach § 187

$$\int_{(s)} \frac{1}{z^\mu (z^2-a^2)}\,dz = \int \frac{1 : z^\mu (z+a)}{z-a}\,dz = 2i\pi \frac{1}{a^\mu 2a} = \frac{i\pi}{a^{\mu+1}}.$$

Das Integral über den Halbkreis (R) hat den Wert

$$i\int_0^\pi \frac{Re^{\varphi i}\,d\varphi}{R^\mu e^{\mu\varphi i}(R^2e^{2\varphi i}-a^2)} = \frac{i}{R^{\mu+1}}\int_0^\pi \frac{e^{-(1+\mu)\varphi i}\,d\varphi}{1-\frac{a^2e^{-2\varphi i}}{R^2}},$$

und strebt für wachsende R der Grenze Null zu. Das Integral über den kleinen Null ausschließenden Kreis strebt für abnehmende Radien dieses Kreises ebenfalls der Grenze Null zu, weil $\mu < 1$ ist. Es ist deshalb

$$\lim_{R=\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^\mu (x^2-a^2)}\,dx = \frac{i\pi}{a^{1+\mu}}.$$

Für x^μ ist der Hauptwert vorausgesetzt, darum ist zwischen $-R$ und 0

$$x^\mu = abs\, x^\mu \cdot e^{i\mu\pi}.$$

*) Dieser Beweis gilt im Grunde nur für den Cauchyschen Hauptwert, aber seine Verallgemeinerung ist nicht schwer.

Es ist deshalb

$$\int_{-R}^{0} \frac{dx}{x^\mu (x^2 - a^2)} = \frac{1}{e^{\mu\pi i}} \int_{0}^{R} \frac{dx}{x^\mu (x^2 - a^2)},$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^\mu (x^2 - a^2)} = (1 + e^{-\mu\pi i}) \int_{0}^{R} \frac{dx}{x^\mu (x^2 - a^2)},$$

und wenn man mit R zur Grenze ∞ übergeht

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^\mu (x^2 - a^2)} = \frac{i\pi}{a^{\mu+1}} \cdot \frac{1}{1 + e^{-\mu\pi i}} = \frac{i\pi e^{\frac{1}{2}\mu\pi i}}{2\, a^{\mu+1} \cos\frac{1}{2}\mu\pi}.$$

Speziell für $a = i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ folgt

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^\mu (x^2 + 1)} = \frac{\pi e^{\frac{1}{2}\mu\pi i}}{2 e^{\frac{\mu i\pi}{2}} \cos\frac{1}{2}\mu\pi} = \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}\mu\pi}.$$

Wir machen noch die Substitution $\sqrt{x}$ für x und setzen $\mu = 2\lambda - 1$, so folgt

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^\lambda (1 + x)} = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi}.$$

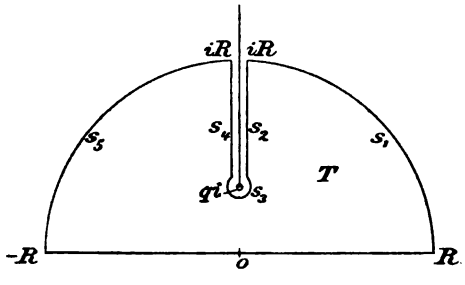
Nach § 149 ist aber das Integral gleich $B(1-a, a) = \Gamma(a)\Gamma(1-a)$. Damit ist die Sinusformel der Gammafunktion nochmals erwiesen.

198) Nun soll noch das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pxi}}{(x - qi)^a} dx,$$

wenn der reelle Teil von a positiv ist und wenn p und q positiv sind, nach der Cauchyschen Methode ausgewertet werden.

Die Begrenzung s eines Gebietes T sei zuerst der gerade Weg zwischen $-R$ und $+R$, dann folgt ein Viertelkreis von R bis iR, dies Stück werde mit s_1 bezeichnet. Daran stößt das Begrenzungsstück s_2, das geradlinig längs der imaginären Achse (auf dem rechten Ufer) bis nahe an den Punkt qi herangeht. Ihm folgt ein kleiner Kreis s_3 mit dem Radius ε, der den Punkt qi negativ umkreist,



weiter geht die Begrenzung als Stück s_4 auf dem linken Ufer der imaginären Achse zum Punkte iR zurück, um mit dem Viertelkreise s_5 von iR bis $-R$ das Gebiet T vollständig zu begrenzen. In diesem Gebiete ist der Integrand, wenn man x durch $z = x + yi$ ersetzt, eine reguläre analytische Funktion, das über s erstreckte Integral ist Null.

Die Integrale über s_1 und s_5 werden mit wachsenden R beliebig klein, weil auf ihnen $\sin\varphi$ positiv ist. Wir setzen sie zusammen gleich δ_R, $\lim \delta_R = 0$. Wir erhalten dann mit Fortlassung der Integranden

$$\int_{(s)} = \int_{-R}^{R} + \int_{(s_2)} + \int_{(s_3)} + \int_{(s_4)} + \delta_R = 0.$$

Das Integral über $s_2 + s_3 + s_4$ transformieren wir durch die Substitution $(q + z')i = z$. Diese bedeutet eine Verschiebung und eine Drehung um 90° von links nach rechts. Die s_2, s_3, s_4 in der z'-Ebene entsprechenden Wege seien s_2', s_3', s_4'. Läuft z von iR bis $(q+\varepsilon)i$ über s_2, so läuft z' von $R - q$ bis ε über s_2' auf dem unteren Ufer der x'-Achse. Durchläuft z den Kreis s_3 negativ herum, so durchläuft z' einen Kreis s_3' mit dem Radius ε um den Punkt Null negativ herum. Durchläuft z den Weg s_3, so durchläuft z' das obere Ufer der positiv reellen x'-Achse von ε bis $R - q$. In $(z - qi)^{-a} = e^{-a\lg(z-qi)}$ ist im Integral von $-R$ bis $+R$ der Hauptwert des Logarithmus zu nehmen. Dieser ist für $z = 0$ gleich $\lg q - \frac{1}{2}i\pi$. Auf den übrigen Teil des Weges s ist die stetige Fortsetzung des Hauptwertes zu wählen. Der imaginäre Teil desselben ist auf der Linie s_4, weil der Punkt qi, wenn man z über $-(s_5)$ führt, gleich $-\frac{3i\pi}{4}$, denn man hat dabei eine halbe negative Umdrehung um den Punkt qi gemacht. Nun ist

$$\int_{(s_2+s_3+s_4)} \frac{e^{pzi}\,dz}{(z-qi)^a} = ie^{\frac{3i\pi a}{2}} \int_{(s_2'+s_3'+s_4')} \frac{e^{-pq}e^{-pz'}\,dz'}{z'^a}$$

$$= ie^{\frac{3i\pi a}{2}} e^{-pq} \int_{(s_1'+s_2'+s_3')} e^{-pz'}z'^{-a}\,dz'.$$

Das letzte Integral unterscheidet sich aber nach § 195 von

$$fac(-a)(1 - e^{-2ai\pi})p^{a-1} = 2ie^{-ai\pi}\sin a\pi\, fac(-a)p^{a-1}$$

um eine verschwindende Größe, wenn R über alle Grenzen wächst. Für $\lim R = \infty$ $(\delta_R = 0)$ hat man deshalb

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pis}}{(s-qi)^a}\,ds = 2e^{\frac{ai\pi}{2}} e^{-pq} p^{a-1} fac(-\alpha)\sin a\pi$$

$$= 2\pi \frac{e^{\frac{ai\pi}{2}} e^{-pq} p^{a-1}}{fac(a-1)}.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-pis}}{(s-qi)^a}\,ds = 0.$$

Der Halbkreis R ist hier nach unten zu ziehen, und da in ihm keine singuläre Stelle vorhanden ist, so ist die Sache einfacher.

Die Anwendbarkeit des Cauchyschen Satzes ist eine vielfältige. Wir müssen uns mit den gegebenen Beispielen begnügen.

---

199) Ein knotenzählendes Integral von Gauß. In Gauß' Nachlaß im fünften Bande seiner Werke befindet sich auf Seite 605 die Bemerkung:

„Eine Hauptaufgabe aus dem Grenzgebiet der Geometria situs und der Geometria magnitudinis wird die sein, die Verschlingungen zweier geschlossenen oder unendlichen Linien zu zählen.

Es seien die Koordinaten eines unbestimmten Punktes der einen Linie x, y, z, der zweiten x', y', z' und

$$V = \int\int \frac{\Delta}{r^3},$$

wenn

$$r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2},$$

und

$$\Delta = \begin{vmatrix} x'-x, & y'-y, & z'-z \\ dx, & dy, & dz \\ dx', & dy', & dz' \end{vmatrix}$$

ist, dann ist dieses Integral durch beide Linien ausgedehnt, gleich $4m\pi$, und m die Anzahl der Umschlingungen."

Dieser Satz soll hier noch bewiesen werden. Dazu führen wir einige Abkürzungen ein. Es sei

$$dX = (z-z')\,dy - (y-y')\,dx, \quad dX' = (z'-z)\,dy' - (y'-y)\,dx',$$
$$dY = (x-x')\,dz - (z-z')\,dy, \quad dY' = (x'-x)\,dz' - (z'-z)\,dx',$$
$$dZ = (y-y')\,dx - (x-x')\,dy, \quad dZ' = (y'-y)\,dx' - (x'-x)\,dz',$$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz$$
$$= -\frac{\partial r}{\partial x'}dx - \frac{\partial r}{\partial y'}dy - \frac{\partial r}{\partial z'}dz,$$

$$d' = \frac{\partial}{\partial x'}\cdot dx' + \frac{\partial}{\partial y'}\cdot dy' + \frac{\partial}{\partial z'}\cdot dz',$$

so daß

$$d'r = \frac{\partial r}{\partial x'}dx' + \frac{\partial r}{\partial y'}dy' + \frac{\partial r}{\partial z'}dz'$$
$$= -\frac{\partial r}{\partial x}dx' - \frac{\partial r}{\partial y}dy' - \frac{\partial r}{\partial z}dz'$$

ist. In dieser Bezeichnung ist das zu behandelnde Integral

$$V = \int\int \frac{dX'dx + dY'dy + dZ'dz}{r^3}$$
$$= \int\int \frac{dXdx' + dYdy' + dZdz'}{r^3}.$$

Die Kurve, der x, y, z angehört, werde mit s bezeichnet, die andere mit s'. Nehmen wir nun das Integral nicht über die geschlossene Kurve s, sondern zwischen zwei Punkten derselben zwischen s_0, in dem die Koordinaten x_0, y_0, z_0 sind, und s, in dem die Koordinaten x, y, z, so sind in dem Integrale

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \int_{(s')} \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

die Funktionen $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, die zunächst nur abkürzende Bezeichnungen für die Integrale

$$\int_{(s')} \frac{dX'}{r^3}, \quad \int_{(s')} \frac{dY'}{r^3}, \quad \int_{(s')} \frac{dZ'}{r^3}$$

sind, Funktionen von x, y, z, die in den Punkten der Kurve s' unendlich groß werden, sonst aber im ganzen Raume endlich und einändrig sind. Nun ist, wenn man s um ds wachsen läßt,

$$dV = dx\int_{(s')} \frac{dX'}{r^3} + dy\int_{(s')} \frac{dY'}{r^3} + dz\int_{(s')} \frac{dZ'}{r^3}$$
$$= \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz,$$

und dieser Ausdruck ist ein vollständiges Differential, wenn man x, y, z sich frei bewegen läßt. Man hat nämlich

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\int_{(s')} \frac{dX'}{r^3}$$

$$= \int_{(s')} \left\{ \frac{dz'}{r^3} - 3\,\frac{(z'-z)\,dy' - (y'-y)\,dz'}{r^4}\,\frac{\partial r}{\partial y} \right\}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\int_{(s')} \frac{dY'}{r^3}$$

$$= \int_{(s')} \left\{ -\frac{dz'}{r^3} - 3\,\frac{(x'-x)\,dz' - (z'-z)\,dx'}{r^4}\,\frac{\partial r}{\partial x} \right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \int_{(s')} dF,$$

$$dF = \frac{2\,dz'}{r^3} + \frac{3\,dz'}{r^4}(y'-y)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{3\,dz'}{r^4}(x'-x)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{3\,dz'}{r^4}(z'-z)\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$- \frac{3(z'-z)}{r^4}\left(dy'\frac{\partial r}{\partial y} + dx'\frac{\partial r}{\partial x} + dz'\frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

$$= -\frac{dz'}{r^3} + \frac{3(z'-z)}{r^4}\,d'r.$$

Es ist demnach

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$= \int_{(s')} \left\{ -\frac{dz'}{r^3} + \frac{3(z'-z)}{r^4}\,d'r \right\} = \int_{(s')} d'\frac{z-z'}{r^3},$$

und dies ist gleich Null, weil die Kurve s' geschlossen ist.

Aus der Symmetrie folgt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

und es ist deshalb dV ein vollständiges Differential.

Mit Hilfe der Prinzipien, die unter §§ 172—180 bei zweigliedrigen vollständigen Differentialen grundlegend waren, erweist man den Satz. Integriert man ein vollständiges dreigliedriges Differential über zwei geschlossene Kurven s_1, s_2 im Raume, die sich durch stetige Deformation so ineinander überführen lassen, daß dabei niemals eine singuläre Stelle der Differentialkoeffizienten überschritten wird, so hat das Integral über (s_1) denselben Wert als das Integral über (s_2).

Das Integral

$$V = \int_{(s)} \left(dx \int_{(s')} \frac{dX'}{r^3} + dy \int_{(s')} \frac{dY'}{r^3} + dz \int_{(s')} \frac{dZ'}{r^3} \right)$$

ändert demnach seinen Wert nicht, wenn man s durch eine andere geschlossene Kurve ersetzt, die aus s durch eine solche Deformation erhalten

wird, die die Kurve s', den Ort der singulären Stellen der Differentialkoeffizienten, nicht überschreitet, und das Integral ist Null, wenn s die Kurve s' nicht umschlingt.

In gleicher Weise kann man natürlich, ohne den Wert des Integrales zu ändern, die Kurve s' deformieren, wenn nur bei der Deformation niemals eine deformierte Kurve die Kurve s durchschneidet.

Wir deformieren nun die Kurve s auf Kreise, die die Kurve s' m-mal umkreisen mögen und die alle in derselben Ebene liegen mögen. Die Kurve s' reduzieren wir auf eine durch den Mittelpunkt dieser Kreise gehende Gerade, die wir zur z-Achse machen und die auf der Ebene der Kreise senkrecht steht, so daß die Kreise in der x, y-Ebene liegen. Auf den Kreisen sei $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, so wird unser Integral

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{(s)} \frac{y\,dx - x\,dy}{(x^2+y^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\varrho^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{2m\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varrho^2+z'^2}^3}$$

$$= -2m\pi\varrho^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{\sqrt{\varrho^2+z'^2}^3} = -2m\pi \left(\lim_{z'=\infty} \frac{z'}{\sqrt{\varrho^2+z'^2}} - \lim_{z=-\infty} \frac{z'}{\sqrt{\varrho^2+z'^2}} \right)$$

$$= -4m\pi,$$

und m ist die Anzahl der Knoten, die die beiden Kurven, wenn eine von ihnen zusammengezogen wird, miteinander bilden.

Zusatz 1. Ersetzt man in dem Integrale

$$u = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$$

x durch $\pi - x$, so erhält man

$$u = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin x\,dx}{1+\cos^2 x} = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x\,dx}{1+\cos^2 x},$$

$$2u = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}.$$

Substituiert man hierin $\cos x = t$, $\sin x\,dx = -dt$, so ergibt sich

$$2u = \pi \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{1+t^2} = 2\pi \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi^2}{2},$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\,dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Zusatz 2. Das Integral

$$u = \int_0^\infty \frac{lg(1 - 2r\cos ax + r^2)\,dx}{1+x^2},$$

in dem $r < 1$ sein soll, läßt sich auf folgende Weise auswerten.

Es ist

$$lg(1-2r\cos ax + r) = lg(1 - re^{axi}) + lg(1 - re^{-axi})$$
$$= -2\left(r\cos ax + \frac{1}{2}r^2\cos 2ax + \frac{1}{3}r^3\cos 3ax + \cdots\right).$$

Die Reihe ist absolut konvergent und läßt sich gliedweise integrieren. Da nach § 147

$$\int_0^\infty \frac{\cos n\,ax\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\pi e^{-na}$$

ist, so ergibt sich, wenn a positiv genommen wird,

$$\int_0^\infty \frac{lg(1-2r\cos ax + r^2)\,dx}{1+x^2} = -2\sum_{(m)}\frac{r^m}{m}\int_0^\infty \frac{\cos m\,ax\,dx}{1+x^2}$$
$$= -\pi\sum_{(m)}\frac{r^m e^{-ma}}{m} = \pi\, lg(1 - re^{-a}).$$

$$\int_0^\infty \frac{lg(1+2r\cos ax + r^2)\,dx}{1+x^2} = \pi\, lg(1 + re^{-a}).$$

Der Grenzübergang $r = 1$ scheint nicht ohne weiteres zulässig zu sein.

Berichtigung. Im § 128 ist für positive a die Formel hergeleitet worden

$$u(b) = \int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{4a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Dazu wurde gezeigt, daß

$$\frac{du}{db} = -\frac{b}{2a}u, \quad \frac{d\,lg\,u}{db} = -\frac{b}{2a}$$

sei. Die mit u ausgeführte Division wird unsicher, wenn u für einen Wert von b verschwindet. Deshalb sollte der Nachweis geführt werden, daß $u(b)$ für reelle b positiv sei. Es genügt, b positiv anzunehmen. Bei diesem Nachweis ist dadurch ein Irrtum untergelaufen, daß die Funktionen $e^{-x^2}x$ von $x = 0$ an für wachsende x als monoton abnehmend in Anspruch genommen wurde, während sie in Wahrheit von $x = 0$ bis

$x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ monoton zu, und erst von da ab monoton abnimmt. Die Beweisführung muß deshalb durch eine andere ersetzt werden.

Da $u(b)$ überall einen bestimmten Differentialquotienten besitzt, so ist $u(b)$ eine stetige Funktion von b, die für $b = 0$ den positiven Wert $\sqrt{\pi : 4a}$ besitzt. Wegen der Stetigkeit gibt es eine Umgebung von b, in der $u(b)$ positiv ist. Angenommen, es wechsle $u(b)$ bei $b = c$ (zum ersten Male) sein Zeichen, so gilt die aus $d\lg u : db = -b : 2a$ entspringende Formel

$$u = \sqrt{\frac{\pi}{4a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

bis in jede beliebige Nähe von c, und da u stetig ist, auch noch für $b = c$. Daraus folgt, daß $u(c)$ für endliche c nicht Null sein kann, u ist fortwährend positiv, und die angesetzte Formel gilt allgemein.

Man kann übrigens die Formel auch leicht dadurch ableiten, daß man $\cos bx$ durch eine Potenzreihe mit hinreichend entferntem Restgliede darstellt.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

J. Thomae:

Grundriß
einer analytischen Geometrie der Ebene.

Mit 8 Figuren im Text. [X u. 184 S.] gr. 8. 1906.

In Leinwand geb. n. ℳ 8.60.

Der Grundriß umfaßt die analytische Geometrie des Punktes, der Geraden, der Kurven und Büschel zweiter Ordnung und legt Gewicht darauf, die wichtigsten Sätze der projektiven Geometrie auf analytischem Wege zu erbringen, ohne die metrischen Beziehungen zu vernachlässigen. Hierdurch gedenkt der Verfasser das Verständnis der projektiven Geometrie zu erleichtern, deren Methoden nach seiner Meinung mit denen der analytischen Hand in Hand gehen müssen.

Die Entstehung des Büchleins aus einem Skelett, das der Verfasser seinen Hörern zur leichteren Repetition der Vorlesungen in die Hand gegeben hat, macht es selbstverständlich, daß es eine Vorlesung nicht überflüssig machen will, daß es vielmehr den Lernenden beim Hören einer Vorlesung unterstützen und ihm die Anlegung eines Heftes erleichtern will.

Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen.

[IV u. 44 S.] 4. 1905. kart. n. ℳ 2.80.

Das vorliegende Buch ist eine Sammlung von Formeln und Sätzen aus der Theorie der elliptischen Funktionen, die die Brauchbarkeit dieser analytischen Gebilde für die praktischen Anwendungen, für das numerische Rechnen erweisen und die Handhabung erleichtern soll, wobei auch eine Reihe von Sätzen theoretischer Natur gegeben sind, so insbesondere die Liouvilleschen Sätze. Um die Brauchbarkeit sogleich ins rechte Licht zu setzen, werden in zwanzig Nummern Anwendungen derselben gegeben.

Diese Anwendungen werden zugleich die Ansicht rechtfertigen, daß für praktische Zwecke die Jacobi-Legendreschen Bezeichnungen die gegebenen sind, so groß auch der theoretische Wert der Weierstraßschen Formen ist. Die Harmonie der Jacobischen Funktionen mit den trigonometrischen bringt dieselben dem Verständnis näher, und ihre Auswertung ist einfacher. Ist die Funktion $\wp(u)$ gegeben, so scheint die Weierstraßsche Theorie keine selbständigen Mittel zur Berechnung von u zu besitzen, die Formelsammlung Schwarz-Weierstraß greift zu diesem Zwecke auf die Legendresche Form zurück, muß aber auf die überaus einfachen und brauchbaren Formeln, die die entsprechende Aufgabe in Jacobis Theorie lösen, verzichten.

Aus diesem Grunde glaubt der Verfasser durch seine Sammlung eine willkommene Gabe denen zu liefern, die mit elliptischen Funktionen zu rechnen haben.

Niels Nielsen:

Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten.

[VI u. 106 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 3.60.

Das Buch versucht eine systematische Untersuchung des Integrallogarithmus; als Ausgangspunkt der Betrachtung ist die Schlömilchsche Bemerkung genommen, daß der Integrallogarithmus und die Krampsche Transzendente als Spezialfälle in der später als Prymsche Q-Funktion bezeichneten Transzendenten enthalten sind. Es ist so gelungen, die schon bekannten, sowie verschiedene neue Eigenschaften des Integrallogarithmus in systematischer Weise herzuleiten.

Handbuch der Theorie der Gammafunktion.

[X u. 326 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 12.—

Der erste Teil des Buches gibt, ohne Zuhilfenahme bestimmter Integrale, ausschließlich durch Anwendung der Theorie analytischer Funktionen, eine elementare Entwicklung der Eigenschaften von $\Gamma(x)$ und verwandter Funktionen, in- dem $\Gamma(x)$ mittels seiner Differentialgleichung definiert wird. Im zweiten Teile wird eine recht vollständige Theorie der beiden Eulerschen Integrale und der durch Gammafunktionen ausdrückbaren bestimmten Integrale, sowie ihrer Anwendung zur Herleitung der Reihen von Stirling, Kummer und Lerch gegeben; ebenso werden die beiden Mellinschen Umkehrprobleme und ihre Anwendung auf gewisse Funktionengattungen behandelt. Der dritte und letzte Teil untersucht die reziproken Gammafunktionen als Entwicklungsfunktionen durch eine Darstellung der von Schlömilch, Jensen, Pincherle und namentlich vom Verfasser ausgebildeten Theorie der Fakultätenreihen; hier findet sich wohl zum erstenmal eine Würdigung der Methoden, die Stirling über solche Reihen angedeutet hat.

Leopold Kronecker:

Vorlesungen über Mathematik.

In zwei Teilen.

I. Teil: Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale.

Herausgegeben von Geh. Hofrat **Dr. E. Netto**, Professor an der Universität Gießen.

[X u. 346 S.] gr. 8. 1894. geh. n. ℳ 12.—

Kroneckers Vorlesungen zeichnen sich durch Originalität und Tiefe der Anschauung, reiche Fülle an Stoff und lebendige Darstellungsweise aus, wobei es besonders von Interesse ist, zu sehen, wie Kronecker Mittelpunkte für seine Untersuchungen gewinnt, die im vorliegenden Bande der Reihe nach durch den zweiten Mittelwertsatz, das Cauchysche Integral, den diskontinuierlichen Faktor und den Differentialausdruck des mehrfachen Integrals nach einem Parameter gegeben sind. Von dem Mittelwertsatze her fließt das Dirichletsche, das Fouriersche und das Poissonsche Integral, sowie die Fouriersche Reihe. Von dem Cauchyschen Satze aus werden die Entwicklungen in Potenzreihen, funktionen-theoretische Sätze, die Summation der Gaußschen Reihen, die Theorie der Gamma-Funktionen und des Integral-Logarithmus, Grundformen für die elliptischen Funktionen hergeleitet. Der diskontinuierliche Faktor wird zum Zwecke der Reduktion mehrfacher auf einfache Integrale, insbesondere für Potentialberechnungen benutzt. Der Hauptsache nach stützt sich aber die Potentialtheorie, soweit sie hier vorgetragen wird, auf die Differentiation mehrfacher Integrale.

Leopold Kronecker:

Vorlesungen über Mathematik.

In zwei Teilen.

II. Teil: Vorlesungen über allgemeine Arithmetik.

1. Abschnitt: Vorlesungen über Zahlentheorie.

Herausgegeben von **Dr. K. Hensel**, Professor an der Universität Marburg a. L.

In 2 Bänden. Mit Figuren im Text. I. Band. [XVI u. 509 S.] gr. 8. 1901. geh. n. *M.* 18.—

Als Aufgabe der allgemeinen Arithmetik bezeichnet Kronecker von vornherein die Untersuchung der rationalen Zahlen und der rationalen Funktionen von einer und mehreren Variablen, wodurch die drei genannten Disziplinen zu einem einheitlichen, organisch gegliederten Ganzen zusammengeschlossen sind.

Im ersten Teile des vorstehenden Bandes der Zahlentheorie wird zunächst die Zerlegbarkeit der Zahlen in ihre Primfaktoren und die Gesetze der Teilbarkeit, d. h. die Theorie der Kongruenzen nach einem Modul auseinandergesetzt; im zweiten Teile wird dargelegt, daß man mit denselben Definitionen und Methoden auch das weitere Reich der rationalen Funktionen beliebig vieler Variablen vollständig beherrscht. Die Anwendbarkeit dieser allgemeinen Prinzipien wird sodann in verschiedenen geometrischen Anwendungen gezeigt, sowie in den wesentlichen Vereinfachungen, welche die Theorie der Kreisteilungsgleichungen, die Beweise für das quadratische, das kubische und das biquadratische Reziprozitätsgesetz und die Theorie der quadratischen Formen durch sie erfährt.

Im dritten Abschnitt folgt eine ausführliche Theorie der Mittelwerte arithmetischer Funktionen, womit schon an früher Stelle die von Dirichlet entwickelten eigentlichen Methoden der Arithmetik — indem er zeigte, daß und wie man ganze Klassen arithmetischer Probleme entweder lösen oder wenigstens die arithmetischen Schwierigkeiten auf analytische reduzieren kann — eingeführt werden und gezeigt wird, daß es wirklich nur der Begriff der Grenze ist, welcher zu den vorher behandelten arithmetischen Definitionen und Methoden als neu hinzutritt.

Der Band schließt mit dem Beweise des Dirichletschen Satzes, daß jede arithmetische Reihe, deren Anfangsglied und Differenz teilerfremd sind, unendlich viele Primzahlen enthält, den Kronecker in einem wesentlichen Punkte vervollständigt.

2. Abschnitt: Vorlesungen über die Theorie der Determinanten.

Herausgegeben von **Dr. K. Hensel**, Professor an der Universität Marburg.

I. Band. Erste bis einundzwanzigste Vorlesung.

Mit 11 Fig. im Text. [XII u. 390 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 20.—, in Leinw. geb. n. *M.* 21.—

In vorliegendem Werke sind die Vorlesungen Kroneckers über die Determinantentheorie unter sorgfältiger Erhaltung seiner Grundprinzipien und unter Benutzung seiner einfachen und wirksamen Methoden so bearbeitet und fortgeführt, daß es eine systematische Darstellung der modernen Determinantentheorie und ihre wichtigsten Anwendungen enthält. In dem zunächst erschienenen ersten Bande geht der Darstellung der allgemeinen Theorie eine sehr eingehende Untersuchung der Determinanten zweiter, dritter und vierter Ordnung voraus, nebst ihren Anwendungen auf die Geometrie, die Arithmetik und die Formentheorie, womit es Kronecker erreicht, daß der Leser mit dem Determinantenkalkul wohlvertraut ist, wenn dann weiter alle Grundeigenschaften der Determinanten n^{ter} Ordnung aus der Betrachtung der Lösung eines Systemes von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten mit einem Schlage in Evidenz gesetzt werden. Der letzte Teil enthält von der Hand des Herausgebers eine Darstellung der Untersuchung der Systeme oder Matrizen a mit Anwendung auf die Theorie der Elementarteiler und auf die Äquivalenz und Teilbarkeit der Systeme —, die heute an die Stelle der älteren Determinantentheorie getreten ist, und bei der die tiefsten Resultate der Determinantenlehre als ganz einfache Sätze einer Arithmetik erscheinen, welche nur wenig schwerer ist als die elementare Zahlentheorie.

Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik.

Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von

Dr. H. Burkhardt,
Professor in Zürich.

In zwei Halbbänden. gr. 8. 1908. Geh. je n. ℳ 30.—

I. Band [XII u. 894 S.] **II. Band** [III, S. 895—1804.]

Als der Verfasser vor Jahren die Aufgabe übernahm für die Enzyklopädie die Artikel über trigonometrische Reihen usw. beizusteuern, schien es ihm erforderlich, die verschiedenen naturwissenschaftlichen Fragestellungen zu besprechen, die auf solche Reihen geführt haben. Das erwies sich als viel weiter greifend, als irgend jemand voraussehen konnte.

Vor allem: die traditionelle Auffassung, daß die Lehre von diesen Reihen aus dem Problem der Saitenschwingungen entsprungen sei, ist nur halb richtig: daneben hat auf Entwicklungen analytischer Funktionen einerseits die astronomische Störungstheorie, andererseits die Ersetzung der Variabeln in einer Potenzreihe durch eine Größe vom absoluten Betrag 1 geführt. Weiter stellte sich heraus, daß über die wirkliche Verwendung endlicher trigonometrischer Reihen eine ungemein ausgebreitete und zerstreute Literatur von astronomischer, physikalischer, geophysikalischer, physiologischer Seite vorliegt. Über alle diese Dinge ist hier zum erstenmal einiger Überblick zu erreichen gesucht. Weiter sind dann physikalische Untersuchungen besprochen, zuletzt Elektrizitätsleitung, soweit sie ohne Berücksichtigung der allgemeinen elektrodynamischen Gleichungen behandelt werden kann. Bei dieser ist mit dem Jahre 1890 abgebrochen, nicht als ob damit irgendwie ein bestimmter Einschnitt charakterisiert werden sollte. Aber der ursprüngliche Plan, diesen Bericht erst fertig zu machen, ehe an die Enzyklopädieartikel gegangen würde, erwies sich als unausführbar.

N. J. Lobatschefskij:

Imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale.

Aus dem Russischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von

Heinrich Liebmann.
Professor an der Universität Leipzig.

Mit 39 Figuren im Text und auf einer Tafel. [XI u. 187 S.] gr. 8. 1904. Geh. n. ℳ 8.—

Die Ausgabe dieser beiden Abhandlungen bildet die Fortsetzung der von Fr. Engel besorgten Ausgabe der beiden grundlegenden Werke Lobatschefskijs „Über die Anfangsgründe der Geometrie“ und „Neue Anfangsgründe der Geometrie“ in „Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie“ Bd. 1.

In der „Imaginären Geometrie“ werden die trigonometrischen Formeln durch Einführung imaginärer Argumente in die sphärische Trigonometrie sehr schnell entwickelt und dann zur Bestimmung des Flächeninhalts von Figuren, sowie auf die Gammafunktion und elliptische Integrale angewendet.

Die andere Arbeit setzt sich das Ziel, eine Reihe von Integralen zu bestimmen oder doch aufeinander zurückzuführen, indem ein und derselbe Körper (z. B. der Kegel oder das Tetraeder) auf verschiedenen Wegen berechnet wird.

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften

mit Einschluß ihrer Anwendungen.

Herausgegeben im Auftrage der

Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien,

sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen.

In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. Geheftet.

Bisher erschienen:

I. **Arithmetik und Algebra**, 2 Teile, red. von **W. Frz. Meyer.**
I. Teil. [XXXVIII u. 554 S.] geh. ℳ 17.—, in Halbfranz geb. ℳ 20.—
II. Teil. [X u. S. 555—1197] geh. ℳ 19.—, in Halbfranz geb. ℳ 22.—

II. **Analysis**, 2 Teile, red. von **H. Burkhardt** und **W. Wirtinger.**
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1899. ℳ 4.80; 2/3. [240 S.] 1900. ℳ 7.50; 4. [160 S.] 1900. ℳ 4.80; 5. [199 S.] 1904. ℳ 6.—; 6. [57 S.] 1906. ℳ 1.60.
II. Teil. Heft: 1. [175 S.] 1901. ℳ 5.20.

III. **Geometrie**, 3 Teile, red. von **W. Frz. Meyer.**
I. Teil. Heft: 1. [220 S.] 1907. ℳ 6.40.
II. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1905. ℳ 4.80; 2. [96 S.] 1904. ℳ 2.80; 3. [199 S.] 1906. ℳ 5.60.
III. Teil. Heft: 1. [183 S.] 1902. ℳ 5.40; 2/3. [256 S.] 1903. ℳ 6.80.

IV. **Mechanik**, 2 Teile, red. von **F. Klein** u. **C. H. Müller.**
I. Teil. 1. Abt. Heft: 1. [121 S.] 1901. ℳ 3.40; 2. [156 S.] 1902. ℳ 4.60; 3. [156 S.] 1903. ℳ 4.60.
— 2. Abt. Heft: 1. [152 S.] 1904. ℳ 4.40.
II. Teil. 1. Abt. Heft: 1. [147 S.] 1901. ℳ 3.80; 2. [131 S.] 1903. ℳ 3.80. 3. [192 S.] 1906. ℳ 5.80.
— 2. Abt. Heft: 1. [124 S.] 1907. ℳ 3.60.

V. **Physik**, 2 Teile, red. von **A. Sommerfeld.**
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 4.80; 2. [159 S.] 1905. ℳ 4.80; 3. [172 S.] 1906. ℳ 5.20; 4. [65 S.] 1907. ℳ 3.60.
II. Teil. Heft: 1. [280 S.] 1904. ℳ 8.—; 2. [104 S.] 1907. ℳ 3.—

VI. 1: **Geodäsie und Geophysik**, red. von **Ph. Furtwängler** und **E. Wiechert.**
Heft: 1. [116 S.] 1906. ℳ 3.40
2. [127 S.] 1907. ℳ 3.60.

VI. 2: **Astronomie**, red. von **K. Schwarzschild.**
Heft: 1. [193 S.] 1905. ℳ 5.80.

In Vorbereitung:

VII. **Geschichte, Philosophie u. Didaktik, nebst Generalregister.** Red. von **F. Klein** u. **C. H. Müller.**

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG — GAUTHIER-VILLARS in PARIS.

Encyclopédie des sciences mathématiques

pures et appliquées.

Publiée sous les auspices des Académies des sciences

de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne

avec la collaboration de nombreux savants.

Edition française,

rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de

Jules Molk, professeur à l'université de Nancy.

En sept tomes. gr. 8.

Paru: Tome I: **vol. I, fasc. I.** [160 pag.] 1904. ℳ 4.— Tome I: **vol. I, fasc. II.** [167 pag.] 1907. ℳ 4.20. Tome I: **vol. III, fasc. I.** [96 pag.] 1906. ℳ 2.40. Tome I: **vol. IV, fasc. I.** [160 pag.] 1906. ℳ 4.—

Durch die günstige Aufnahme veranlaßt, welche die deutsche Ausgabe dieses monumentalen Werkes in Fachkreisen gefunden hat, und auf vielfache Anregungen hat sich die Verlagsbuchhandlung entschlossen, die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften in Gemeinschaft mit der Firma Gauthier-Villars in Paris auch in französischer Sprache erscheinen zu lassen. Das Werk wird, wie schon die erste Lieferung zeigt, seitens der deutschen Bearbeiter viele Änderungen und Zusätze erfahren, und auch die französischen Mitarbeiter, sämtlich Autoritäten auf ihren Gebieten, haben eine gründliche Umarbeitung vorgenommen. Zum ersten Male dürfte somit wohl hier der Fall eingetreten sein, daß sich bei einem so großen Werke die ersten deutschen und französischen Fachgelehrten zu gemeinsamer Arbeit verbunden haben.

Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literaturnachweise) von **Ernst Pascal**, ord. Professor an der Universität zu Pavia. Autorisierte deutsche Ausgabe von weil. A. Schepp in Wiesbaden. In 2 Teilen. 1. Teil: Die Analysis. 2., neubearb. Auflage. Unter Mitwirkung von **E. Pascal**, sowie **Ph. Furtwängler, A. Guldberg, H. Hahn, F. Jung, A. Loewy, H. E. Timerding**, herausg. von **P. Epstein**. [ca. 700 S.] 1908. Biegsam in Lnwd. geb. n. *M* 12.— [Erscheint Ostern 1908.] II. Teil: Die Geometrie. [IX u. 712 S.] 8. 1902. Biegsam in Lnwd. geb. n. *M* 12.—

Der Zweck des Buches ist, auf einem möglichst kleinen Raum die wichtigsten Theorien der neueren Mathematik zu vereinigen, von jeder Theorie nur so viel zu bringen, daß der Leser imstande ist, sich in ihr zu orientieren, und auf die Bücher zu verweisen, in welchen er Ausführlicheres finden kann.

Für den Studierenden der Mathematik soll es ein „Vademekum" sein, in dem er, kurz zusammengefaßt, alle mathematischen Begriffe und Resultate findet, die er während seiner Studien sich angeeignet hat oder noch aneignen will.

Die Anordnung der verschiedenen Teile ist bei jeder Theorie fast immer dieselbe: zuerst werden die Definitionen und Grundbegriffe der Theorie gegeben, alsdann die Theoreme und Formeln (ohne Beweis) aufgezählt, welche die Verbindung zwischen den durch die vorhergehenden Definitionen eingeführten Dingen oder Größen bilden, und schließlich ein kurzer Hinweis auf die Literatur über die betreffende Theorie gebracht.

Vocabulaire Mathématique. français-allemand et allemand-français. Mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch-französisch. Enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. Von Professor Dr. **Felix Müller**. [XV u. 316 S.] Lex.-8. 1900/1901. In Leinw. geb. n. *M* 20.— Wurde in 2 Lieferungen ausgegeben: I. Lieferung. [IX u. 132 S.] 1900. geh. n. *M* 8.— II. Lieferung. [S. IX—XV u. 133—316.] 1901. geh. n. *M* 11.—

Das Vokabularium enthält in alphabetischer Folge mehr als 12000 Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik in französischer und deutscher Sprache und soll in erster Linie eine Ergänzung der gebräuchlichen Wörterbücher für die beiden genannten Sprachen sein. In dem II., deutsch-französischen, Teil sind, ebenso wie im ersten, die zu einem und demselben Hauptworte gehörigen zusammengesetzten Kunstausdrücke unter diesem Hauptworte vereinigt. So sind unter dem Artikel „Kurve" 449 Kunstausdrücke zusammengestellt, in denen dieses Wort vorkommt. Jedem Adjektivum sind diejenigen Hauptwörter in Klammern beigefügt, die mit ihm zu einem Kunstausdruck verbunden werden. Da das Vokabularium zugleich als Vorarbeit zu einem Mathematischen Wörterbuche dienen soll, so sind auch zahlreiche Nominalbenennungen aufgenommen, deren Anführung aus rein sprachlichem Interesse überflüssig erscheinen dürfte. Z. B. Gaußsche Abbildung (einer Fläche auf eine Kugel) (Gauß 1827) [inf. Geom.] représentation de Gauss; Clairauts Satz (über die geodätischen Linien auf Umdrehungsflächen) (Clairaut 1733) [inf. Geom.] théorème de Clairaut. Aus den beigefügten Zusätzen ist zu ersehen, daß das Vokabularium mehr bietet, als der Titel erwarten läßt.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Von **Moritz Cantor**. In 4 Bänden. I. Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. 3. Auflage. Mit 114 Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. [VI u. 941 S.] gr. 8. 1907. geh. n. *M* 24.—, in Halbfranz geb. n. *M* 26.— II. Band. Vom Jahre 1200 bis zum Jahre 1668. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 190 Figuren im Text. [XII u. 943 S.] gr. 8. 1900. geh. n. *M* 26.—, in Halbfranz geb. n. *M* 28.— III. Band. Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. In 3 Abteilungen. Mit 146 Figuren im Text. [X u. 923 S.] gr. 8. 1901. geh. n. *M* 25.—, in Halbfranz geb. n. *M* 27.— IV. Band. Von 1759 bis 1799. Bearbeitet von **M. Cantor, S. Günther, V. Bobynin, A. v. Braunmühl, F. Cajori, E. Netto, G. Loria, V. Kommerell, G. Vivanti**, und **C. R. Wallner**. 1.—3. Lieferung. [S. 1—642.] gr. 8. 1907. geh. je n. *M* 5,60. Lieferung 4 unter der Presse.

„Einen hervorragenden Platz unter den neueren Veröffentlichungen über die Geschichte der Mathematik nimmt die zusammenfassende Darstellung ein, die uns Moritz Cantor geschenkt hat.

Mit rastlosem Fleiß, mit nie ermüdender Geduld, mit der unverdrossenen Liebe des Sammlers, der auch das scheinbar Geringe nicht vernachlässigt, hat Moritz Cantor dies kolossale Material gesammelt, kritisch gesichtet, durch eigene Forschungen ergänzt, nach einheitlichen Grundsätzen und einheitlichem Plan zu einem Ganzen verschmolzen, und indem er in seltener Unparteilichkeit bei strittigen Fragen, deren die Geschichte der Mathematik so viele hat, auch die abweichenden Ansichten zu Wort kommen ließ, hat er ein Werk geschaffen, das die reichste Quelle der Belehrung, der Anregung für einen jeden ist, der sich über einen geschichtlichen Fragepunkt Rat holen, der an der Geschichte der Mathematik mitarbeiten will..." (Aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen. 1900. Nr. 3.)

Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Von Dr. **W. Ahrens** in Magdeburg. [X u. 428 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. n. *M* 10.—

Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. Von Dr. **W. Ahrens** in Magdeburg. [X u. 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M* 8.—

Der Verfasser der „Mathematischen Unterhaltungen" hat uns mit einem neuen, überaus fesselnden und originellen Werke überrascht, welches man als einen mathematischen „Büchmann" bezeichnen könnte, wenn es nicht neben aphoristischen Bemerkungen auch längere Briefe und Auseinandersetzungen brächte. Beginnt man zu lesen, so möchte man das Buch nicht aus der Hand legen, bis man zum Ende gelangt ist, und dann werden viele wieder von vorn beginnen. Jedem wird es Neues bringen, möge er noch so belesen sein . . . gerade das vorliegende Buch gibt einen tiefen Einblick in das Ringen der Geister, und manchem wird durch manche kurze, treffende Bemerkung ein Licht über ganze Gebiete der Wissenschaft aufgehen . . . Ein alphabetisches Sach- und Namenregister erleichtert die Orientierung. (Prof. Dr. Holzmüller.)

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN.

Encyklopädie der Elementar-Mathematik.

Ein Handbuch für Lehrer und Studierende von

Dr. Heinrich Weber und **Dr. Joseph Wellstein,**

Professoren an der Universität Straßburg i. Els.

In drei Bänden.

I. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von **H. Weber.** 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 9.60.

II. Elemente der Geometrie. Bearbeitet von **H. Weber** [illegible] **Wellstein** [illegible] **thal.** Mit 280 Textfiguren. [XII u. 604 S.] gr. 8. 19[illegible]
[2. Auflage unter der Presse.]

III. Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeit[illegible] und **R. H. Weber** (Heidelberg). Mit 358 Textfigure[illegible] In Leinwand geb. n. ℳ 14.—

Das Werk verfolgt das Ziel, den künfti[illegible] schaftlichen Standpunkt zu stellen, von dem au[illegible] später zu lehren hat, tiefer zu erkennen und zu[illegible] dieser Lehren für die allgemeine Geistesbildung [illegible] Arbeit ist nicht in der Vergrößerung des Umfan[illegible] zu ersehen oder in der Einkleidung höherer [illegible] Gewand, sondern in einer strengen Begründung [illegible] der Elemente. Das Werk ist nicht sowohl für [illegible] Lehrer und Studierenden bestimmt, die neben [illegible] tungen auch eine für den praktischen Gebrauch[illegible] sammenstellung der wichtigsten Algorithmen und

„... Zwei Momente müssen hervorgehoben werden, d[illegible] Das eine liegt darin, daß die grundlegenden Fragen der Ge[illegible] erfahren, in einem Umfange, wie er in zusammenfassenden [illegible] Das zweite Moment ist in dem Umstande zu erblicken, daß [illegible] haben, eine pragmatische Vorführung des üblichen Vorrats [illegible] tionen un[illegible] gewählte[illegible] überall [illegible] Abschnit[illegible] Rückwei[illegible] sollen; d[illegible] Geometr[illegible] cyklopä[illegible] Grenzg[illegible] und da[illegible] geomet[illegible] und m[illegible] Fragen[illegible]

mit sch[illegible] Formel[illegible] und Sti[illegible]

matik [illegible] Lehrer[illegible] systema[illegible] elemen[illegible]

aber z[illegible] Mathem[illegible] studier[illegible] schaft[illegible] stalten[illegible]

[illegible] Nr. 8.) [illegible] sein, ist [illegible] hrern der [illegible] alle selbst [illegible] n Wissen- [illegible] lk zu ge- [illegible] g. Nr. 4.)

JUL 22 1910